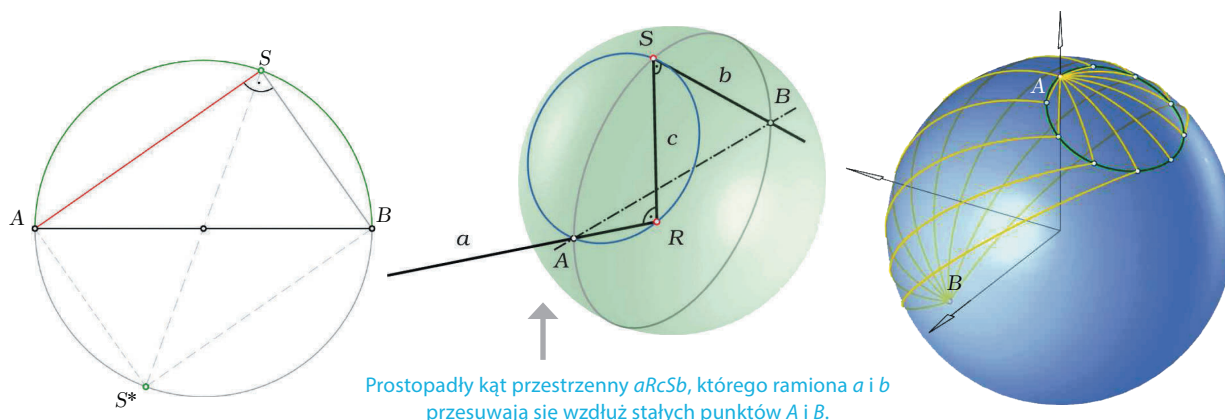


Tales i Pitagoras w przestrzeni kosmicznej

Uogólnienia: jak to zrobić?

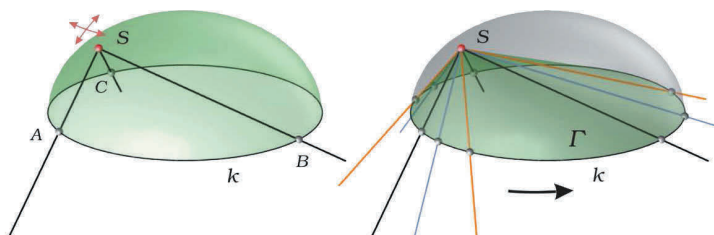


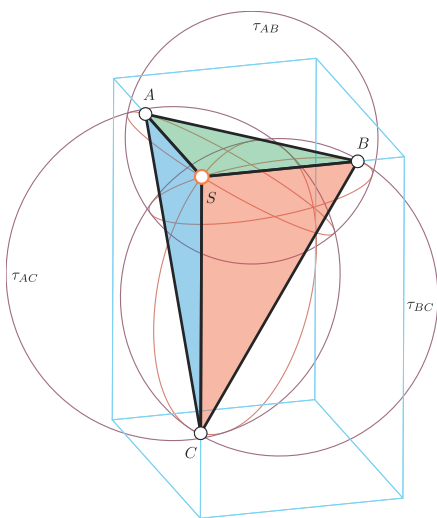
Zgodnie z twierdzeniem Talesa, każdą średnicę AB okręgu widać z dowolnego punktu na okręgu S pod kątem prostym (rysunek u góry po lewej). Inne sformułowanie tego twierdzenia brzmi: Jeśli ramiona kąta prostego przechodzą przez dwa stałe punkty A i B , to wierzchołek S opisuje okrąg k nad średnicą AB (okrąg Talesa). Rysunek ilustruje dowód twierdzenia.

Rozważmy prostokąt $ASBS^*$. Wszystkie punkty są w równej odległości od środka prostokąta, a zatem leżą na okręgu. Twierdzenie to można najpierw uogólnić na sferę (według Güntera Weissa). Położenie wierzchołków sferycznych kątów prostych, których łuki ramion przechodzą przez dwa punkty sfery A i B (przy założeniu, że B nie jest punktem przeciwległym do A), jest sferycznym przekrojem stożkowym

z osią AB (patrz prawy górny rysunek). G. Weiss i F. Gruber badali również położenie wierzchołka S ortogonalnego trójkąta, którego osie zawsze przecinają okrąg. Wbrew intuicji, nie jest to „kula Talesa”, lecz elipsoida obrotowa, która wyłania się z kuli przez kompresję z określonym współczynnikiem $1/\sqrt{2}$. Co ciekawe, trójkąt można obracać o 360° w dowolnej pozycji S , bez utraty kontaktu z „okręgiem prowadzącym”. Przy tym opisuje on ortogonalny stożek I' (patrz rysunek poniżej, po prawej).

Ortogonalny trójkąt przesuwa się po okręgu. Wierzchołek porusza się po elipsoidzie. Trójkąt może obracać się wzdłuż stożka w każdej pozycji





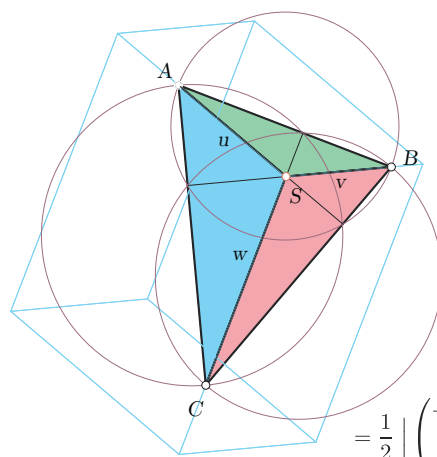
Twierdzenie Pitagorasa ma również swoje odpowiedniki w przestrzeni. Jeśli przetniemy prostopadłościan w jednym z wierzchołków S , otrzymamy trójkątny ostrosłup, który ma ortogonalny trójnóg w S . Rozważmy teraz pola powierzchni a, b, c trójkątów SBC, SCA, SAB , które łączą się w S , oraz pole powierzchni d podstawy ABC . Następnie, za pomocą obliczeń wektorowych, można zgrabnie udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Jeśli S jest początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych z punktami $A(u/0/0)$, $B(0/v/0)$ i $C(0/0/w)$ (patrz rysunek powyżej po prawej), to trójkąty SBC, SCA i SAB mają powierzchnie:

$$a = \frac{vw}{2}, \quad b = \frac{wu}{2} \quad \text{und} \quad c = \frac{uv}{2}$$

Pole d trójkąta ABC jest równe iloczynowi wektorowemu ...



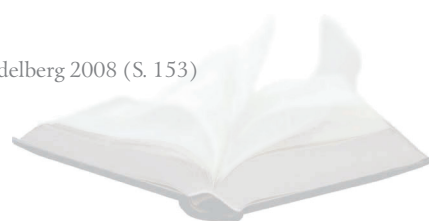
$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} vw \\ wu \\ uv \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(vw)^2 + (wu)^2 + (uv)^2} \end{aligned}$$

Tak więc: $d^2 = \frac{1}{4} [(vw)^2 + (wu)^2 + (uv)^2] = a^2 + b^2 + c^2$

I odwrotnie, jeśli przyjmiemy, że dany jest dowolny trójkąt ABC , dla którego należy znaleźć punkt S tak, aby w S znajdował się ortogonalny trójnóg (S leży zatem na elipsoidzie obrotowej pokazanej po lewej stronie). Rozwiązanie wymaga uogólnienia twierdzenia Talesa, czyli kuli Talesa.

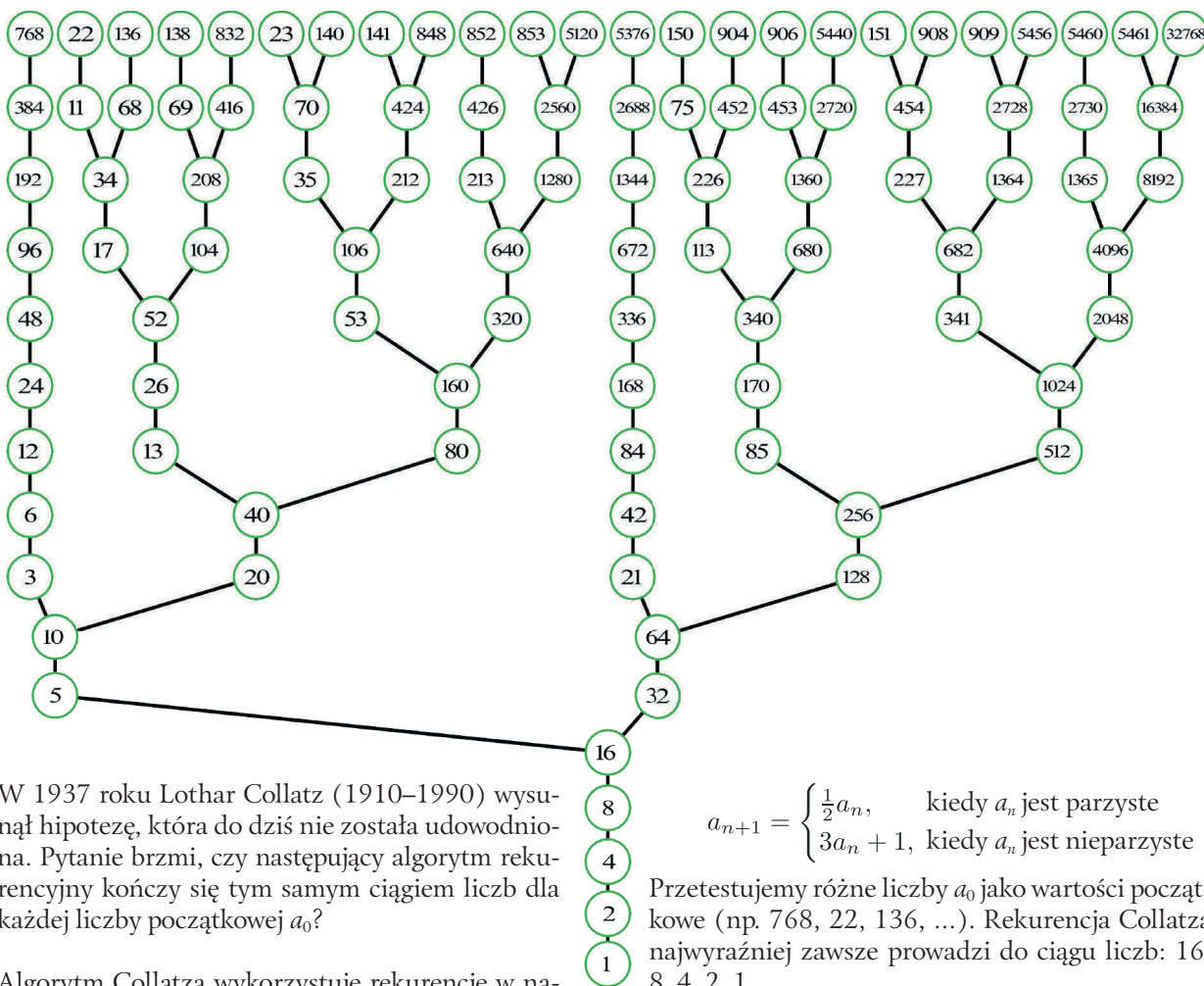
Kula Talesa jest tworzona przez obrót okręgu Talesa wokół przekątnej AB i obejmuje wszystkie punkty w przestrzeni, z których przekątna AB jest widoczna pod kątem prostym. W tym przypadku trzy kule Talesa należy przeciąć nad AB, BC oraz AC , co prowadzi do dwóch symetrycznych rozwiązań.

Zadanie to jest zwykle wykonywane w specjalnym widoku ortogonalnym do płaszczyzny ABC . W tym widoku, okręgi przecięcia trzech kul Talesa formują wysokości trójkąta ABC . Odległość normalną punktu S uzyskuje się za pomocą „płaszczyzny Pitagorasa”.



Hipoteza Collatza

Czy algorytm rekurencyjny kończy działanie?



W 1937 roku Lothar Collatz (1910–1990) wysunął hipotezę, która do dziś nie została udowodniona. Pytanie brzmi, czy następujący algorytm rekurencyjny kończy się tym samym ciągiem liczb dla każdej liczby początkowej a_0 ?

Algorytm Collatza wykorzystuje rekurencję w następujący sposób:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{kiedy } a_n \text{ jest parzyste} \\ 3a_n + 1, & \text{kiedy } a_n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Przetestujemy różne liczby a_0 jako wartości początkowe (np. 768, 22, 136, ...). Rekurencja Collatza najwyraźniej zawsze prowadzi do ciągu liczb: 16, 8, 4, 2, 1.

Wikipedia <http://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem> Collatz-Problem

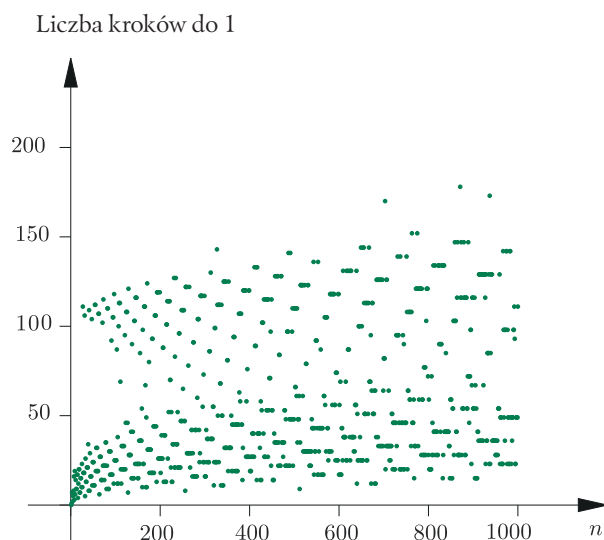
J. Lagarias *The $3x+1$ problem and its generalizations* American Mathematical Monthly Vol. 92, 3 - 23, 1985

J. Lagarias www.ccm.sfu.ca/organics/papers/lagarias The $3x+1$ problem and its generalizations

A. Wassermann http://did.mat.uni-bayreuth.de/personen/wassermann/fun/3np1_e.html

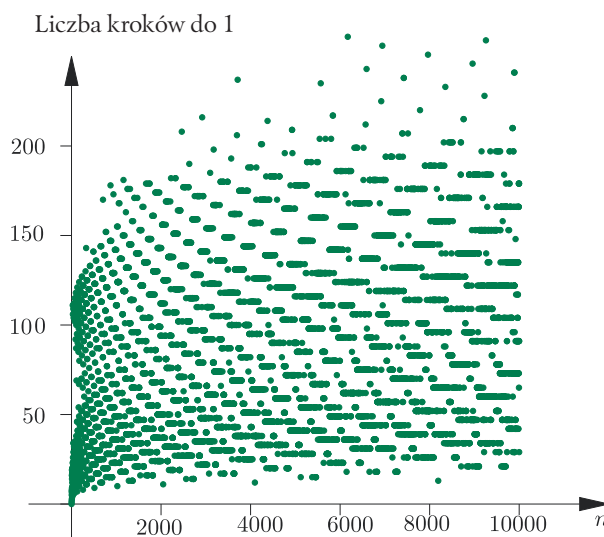
Experiments with the $3n+1$ sequence – Universität Bayreuth

Ile kroków jest potrzebnych, jeśli hipoteza jest prawdziwa?



Najpierw przetestujemy na komputerze dla pierwszych n liczb naturalnych, czy rzeczywiście można uzyskać ciąg liczb 16, 8, 4, 2, 1 w skończonej liczbie kroków przy użyciu algorytmu rekurencyjnego.

Wynik można zwizualizować na wykresie, jak pokazano na powyższych ilustracjach (po lewej zrobiono to dla pierwszych 1000 liczb, po prawej dla pierwszych 10 000 liczb). Na wykresach zaznaczono liczbę kroków (oś y) dla każdej liczby (oś x). Widzimy interesujące wzory – liczba wymaganych kroków wydaje się podlegać pewnym prawidłowościom, które nie są jeszcze w pełni zrozumiałe.



Można również zauważyć, że wraz ze wzrostem n liczba wymaganych kroków rośnie bardzo powoli (wykres dla pierwszego miliona liczb nie różni się znacznie od wcześniejszych).

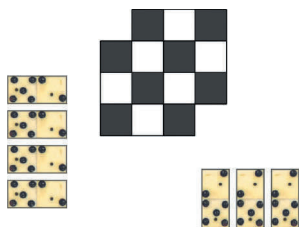
Niestety, jak dotąd nie udało się wyprowadzić dokładnego dowodu matematycznego dla hipotezy Collatza na podstawie obserwacji wizualnej.



Domino na szachownicy

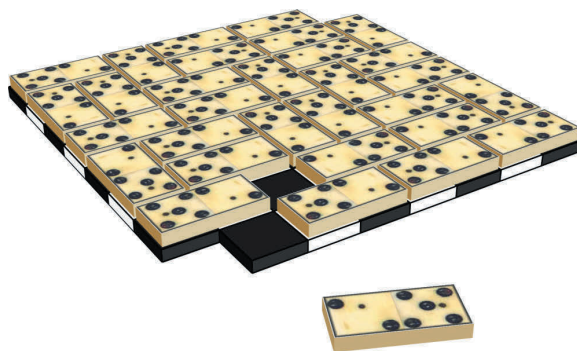
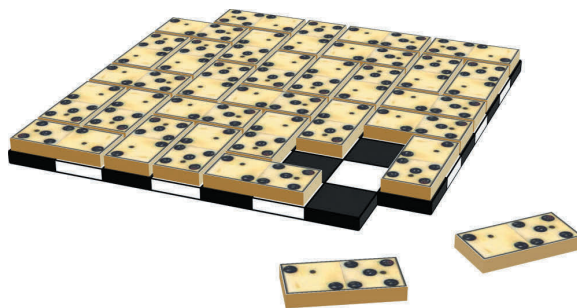
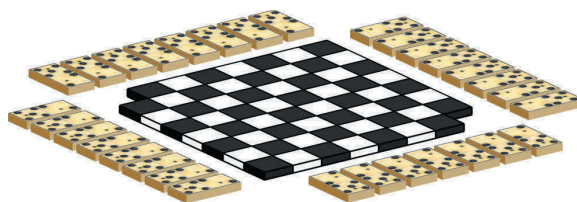
Niektóre dowody są równie proste, co pomysłowe

Niektóre z najpiękniejszych wyników matematyki to stwierdzenia dotyczące relacji, które na pierwszy rzut oka są trudne do rozpoznania, ale mimo to dotyczą stosunkowo prostych kwestii. Przykładem może być problem związany z kamieniami domina na kwadratowej siatce 8×8 . Na planszy składającej się z 64 pól potrzeba 32 kamieni domina, aby pokryć cały kwadrat. Pytanie, które pojawia się w matematyce brzmi: Czy można pokryć tę planszę używając 31 kamieni domina, pozostawiając dwa przeciwległe kwadraty po przekątnej wolne?



Oczywistą rzeczą byłoby przetestowanie mniejszych siatek. Ale co z tego, że uda się pokazać, że tam to nie działa? Rozwiązanie problemu na większej siatce jest równie pomysłowe, co proste. Wyobraźmy sobie szachownicę, na której czarne i białe pola występują naprzemiennie. Każdy kamień domina zawsze pokrywa jedno czarne i jedno białe pole. Dwa przeciwległe kwadraty po przekątnej zawsze mają ten sam kolor, to dowodzi, że rozwiązanie nie jest możliwe.

Pomysłowy „ruch” w dowodzie to zastąpienie wyrażenia „kwadratowa siatka 8×8 ” słowem „szachownica”. To jedno spostrzeżenie ilustruje, jak podstawowe idee mogą prowadzić do eleganckich i prostych dowodów. Nie trzeba dodawać, że prawdziwy matematyk natychmiast zaczyna wymyślać warianty trójwymiarowe...

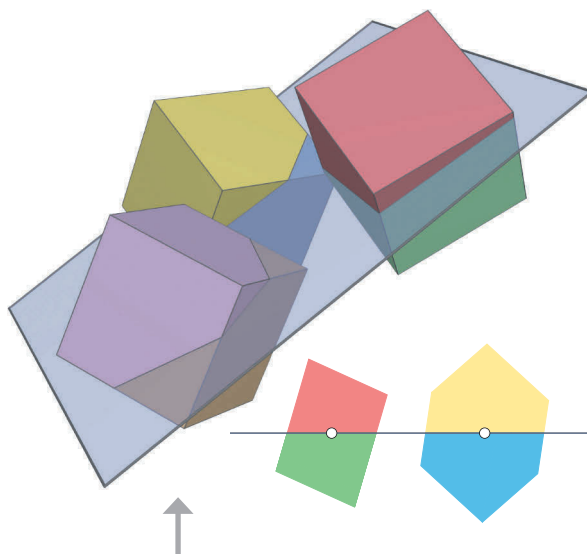
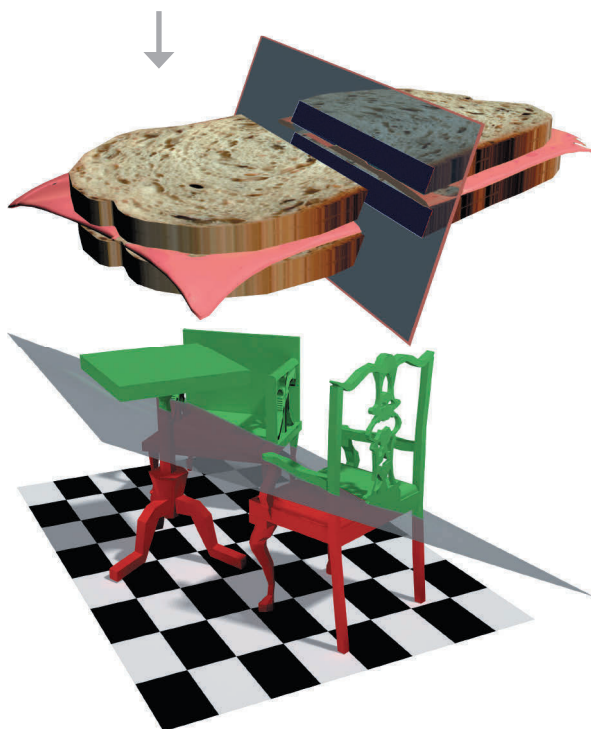


Kanapka z szynką

Jak dzielić się sprawiedliwie?

Matematycy czasami zajmują się dość dziwnymi „problemami”. Na przykład, czy można przeciąć kanapkę z szynką jednym cięciem tak, aby objętość obu kromek chleba i „wkładki” zmniejszyła się o połowę? Ta kwestia jest znana jest jako twierdzenie Stone’a-Tukeya, nazwane na cześć Arthura H. Stone’a (1916–2000) i Johna W. Tukey’a (1915–2000), i jest czasami łatwiej zapamiętywane jako „twierdzenie o kanapce z szynką i serem” (ang. *ham and cheese theorem*).

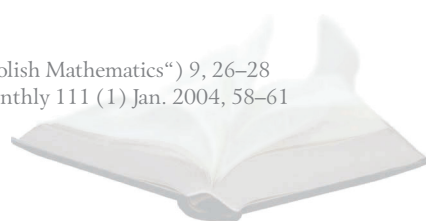
Sprawiedliwy podział dwóch kromek chleba z szynką



W przestrzeni dwuwymiarowej do podziału używa się linii, a w przestrzeni trójwymiarowej – płaszczyzn.

Twierdzenie to odnosi się do przestrzeni n -wymiarowej i stwierdza, że można rozciąć n obiektów na dwa podobiekty o równej objętości za pomocą jednej $(n - 1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny. W przestrzeni trójwymiarowej oznacza to, że można przeciąć trzy bryły jedną płaszczyzną, tak aby objętość brył po obu stronach płaszczyzny była równa.

Łatwo to sobie wyobrazić, jeśli odetniemy trzy sześciiany znajdujące się w określonym położeniu przez płaszczyznę wyznaczoną przez ich trzy środki. Jednak twierdzenie to działa również w przypadku znacznie bardziej złożonych struktur, takich jak „zestaw wypoczynkowy” na rysunku po lewej stronie.



Twierdzenie Picka

Powierzchnia wielokątów siatki

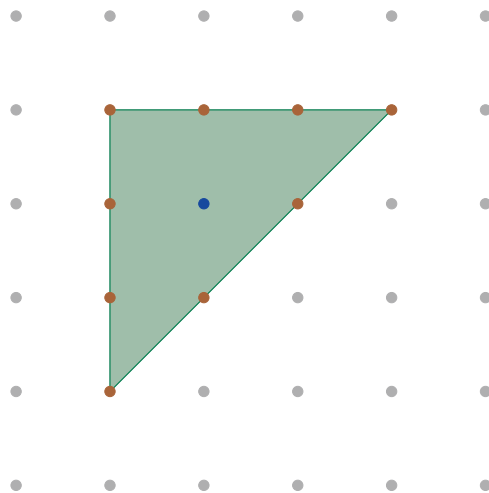
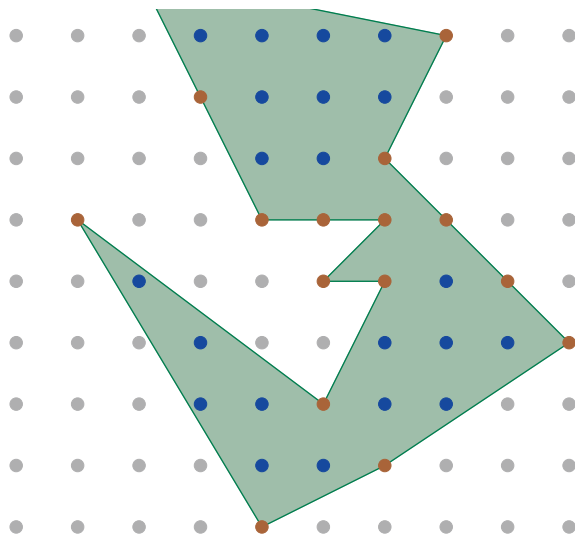
Georg A. Pick (1859–1942) udowodnił przydatną metodę obliczania powierzchni wielokątów, których wierzchołki mają współrzędne całkowite (tzw. wielokąty kratowe). Twierdzenie Picka mówi, że powierzchnię A takiego wielokąta można wyznaczyć, znając liczbę I punktów kratowych wewnątrz wielokąta oraz liczbę R punktów na jego bokach:

$$A = I + R/2 - 1$$

Wielokąt nie musi być wypukły, ale nie może mieć nakładających się części. Na przykład, pole trójkąta prostokątnego przedstawionego po prawej stronie wynosi 4,5 i można je również obliczyć w następujący sposób:

$$I = 1, R = 9 \Rightarrow A = 1 + 9/2 - 1 = 4,5$$

$$I = 21, R = 16 \Rightarrow A = 28$$



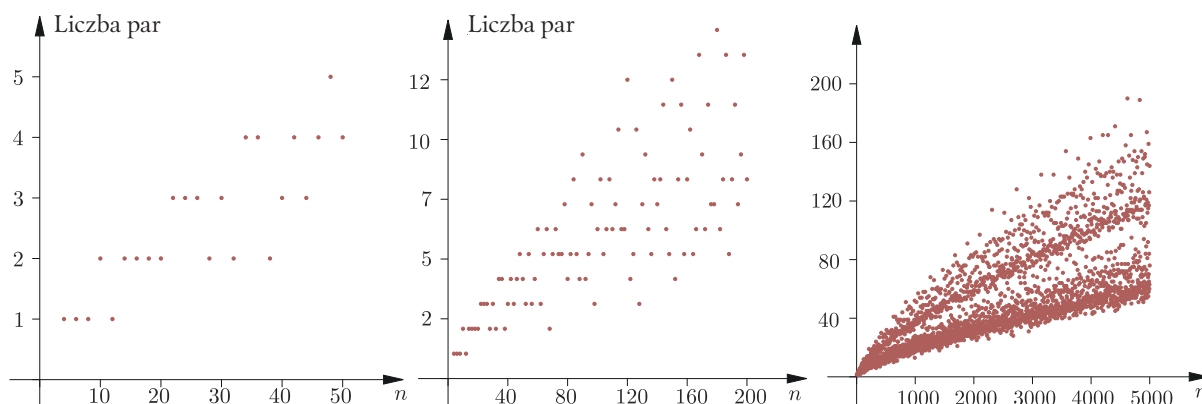
Twierdzenie jest addytywne: Jeśli zsumujesz pola dwóch wielokątów, które mają jeden wspólny bok, punkty kratowe na tym boku staną się punktami wewnętrznymi. Wielokrotne dodawanie pól prowadzi do prostokątów równoległych prowadzi do prostokątów równoległych do osi, dla których twierdzenie Picka jest natychmiast oczywiste.

Z twierdzenia Picka wynika na przykład, że trójkąt którego wierzchołki leżą na siatce kratowej ma zawsze pole równe $1/2$, pod warunkiem, że trójkąt nie zawiera żadnych innych punktów kratowych (ani na krawędziach, ani we wnętrzu).

Twierdzenie Picka można również wykorzystać do udowodnienia twierdzenia Eulera o wielościanach.

Hipoteza Goldbacha

„Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”



Hipoteza wysunięta przez Christiana Goldbacha (1690–1764) została zweryfikowana dla wszystkich liczb do 10^{18} (stan na rok 2007). Niemniej jednak, matematycy określają ewidentnie poprawne twierdzenie jako „hipotezę”, dopóki nie pojawi się rozstrzygający dowód. Taki dowód nie został jeszcze znaleziony, mimo że ogłoszono nagrodę pieniężną w wysokości miliona dolarów za jego rozwiązanie.

Liczby 10 i 22 można wyrazić na dwa lub trzy sposoby jako sumę dwóch liczb pierwszych:

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5 \quad 22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$$

Im większa liczba n , tym więcej jest par liczb pierwszych, których suma wynosi n . Aby zobrazować tę zależność, warto przyjrzeć się temu graficznie. Dla liczb do $n = 50$ można uzyskać maksymalnie pięć takich par liczb pierwszych:

$$48 = 5 + 43 = 7 + 41 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$$

Na powyższych ilustracjach przedstawiono liczbę par liczb pierwszych dla każdej liczby naturalnej n . Jeśli teraz zwiększymy n , wykres będzie miał kształt klina (rysunek po prawej stronie). W przypadku liczb parzystych w okolicach $n = 5000$ zawsze istnieje więcej niż 40 par liczb pierwszych. Wygląda na to, że przy jeszcze większych wartościach n przypadek, gdy nie ma żadnej pary (0 par), jest mało prawdopodobny. Jednak nie zostało to jeszcze udowodnione.

Mniej restrykcyjne stwierdzenie sformułował Leonhard Euler, który sugerował, że każda liczba nieparzysta większa niż 5 może być zapisana jako suma trzech liczb pierwszych. To twierdzenie zostało ostatecznie udowodnione w 1937 roku przez Iwana Matwiejewicza Winogradowa (1891–1983) dla wszystkich wystarczająco dużych liczb.

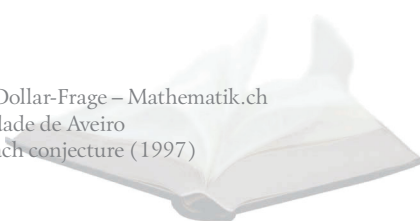
A. Doxiadis *Onkel Petros und die Goldbach'sche Vermutung* Lübbe (2000)

B. Berchtold www.mathematik.ch/mathematiker/Goldbachsche_Vermutung.php Die Eine-Million-Dollar-Frage – Mathematik.ch

T. Oliveira e Silva www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html Goldbach conjecture verification – Universidade de Aveiro

plus magazine <http://plus.maths.org/issue2/xfile/index.html> Mathematical mysteries: the Goldbach conjecture (1997)

Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Goldbachsche_Vermutung Goldbachsche Vermutung



Funkcja zeta Riemanna

w połączeniu z liczbami pierwszymi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ pierwsza}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s}) \dots}$$

Funkcja zeta Riemanna łączy w sobie teorię funkcji i teorię liczb. Ma biegun w punkcie $s = 1$ i trywialne zera w:

$$s = -2, -4, -6 \dots$$

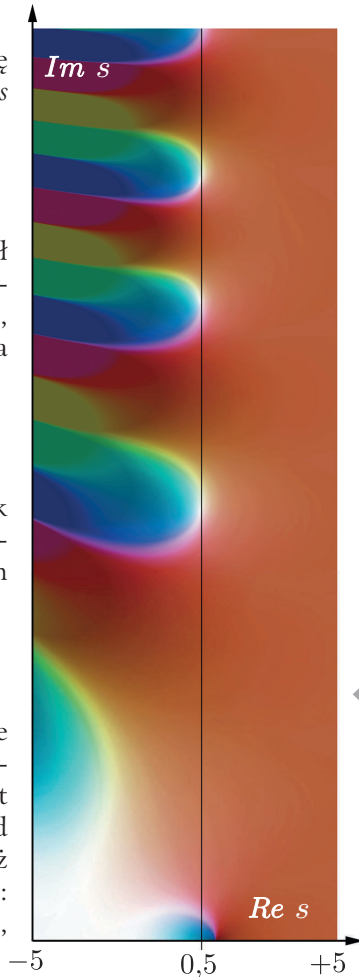
Bernhard Riemann (1826–1866) wysunął hipotezę, która do dziś pozostaje nieudowodniona, ale jest wysoce prawdopodobna, że wszystkie nietrywialne zera funkcji zeta Riemanna mają postać:

$$s = \frac{1}{2} + it \quad (t \in \mathbb{R})$$

Istnieje bardzo atrakcyjny wizualnie rysunek (zob. następna strona). Funkcja zeta Riemanna jest wizualizowana w „odpowiednim obszarze” płaszczyzny liczbowej Gaussa

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i \cdot t\right)$$

jako czarna krzywa, która wielokrotnie przechodzi przez początek układu współrzędnych, podczas gdy część urojona t jest wizualizowana jako struktura spiralna nad nią. Część rzeczywistą można również uwzględnić poprzez kodowanie kolorami: krzywa, której część rzeczywista wynosi 0, jest czarna.



Różne reprezentacje funkcji zeta Riemanna pokazują bliski związek z rozkładem liczb pierwszych. Reprezentacja skrajnie po lewej stronie ważna tylko $\text{Re}(s) > 1$. Dzięki całkom można podać zamknięty wyraz dla wszystkich wartości

Inny sposób wizualizacji za pomocą kodowania kolorami, podobny do „kolorowania obszarów” (patrz strona 290). Kąt fazowy i wartość bezwzględna są przedstawiane za pomocą koloru i jasności.

