szkic rozwiązania – Witold Bednarek

Oczekiwane

Zadanie 1.

W pudełku znajdują się karteczki, na których zapisano liczby naturalne. Jest k karteczek z liczbą k dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wyciągamy losowo jedną karteczkę. Jaka jest wartość oczekiwana liczby na karteczce?

Rozwiązanie

Mamy w sumie

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

karteczek. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania karteczki z liczbą k wynosi

$$\frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

gdyż karteczek z liczbą k jest k. Zgodnie z definicją wartości oczekiwanej mamy:

$$EX = \frac{2 \cdot 1}{n(n+1)} \cdot 1 + \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} \cdot 2 + \ldots + \frac{2n}{n(n+1)} \cdot n = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n}{n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n(n+1)}$$

Uwaga

Sumę $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ możemy zapisać w prostszej postaci, a mianowicie

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Wzór ten można udowodnić, stosując zasadę indukcji matematycznej, o której już kilka razy pisaliśmy w *Świecie Matematyki* – po raz pierwszy już w 40. wydaniu czasopisma. Zatem po uproszczeniu mamy

$$EX = 2 \cdot \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

Zadanie 2.

Rzucamy 72 razy dwiema kostkami do gry. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wyników, w których wyrzucimy dwie szóstki.

Rozwiązanie

Mamy tu schemat Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu (wyrzucenie dwóch szóstek) wynosi 1/36 oraz liczba doświadczeń wynosi $n = 72$. Stosując podany w opracowaniu *Wartość oczekiwana zmiennej losowej* wzór, mamy

$$EX = np = 72 \cdot \frac{1}{36} = 2$$

Zadanie 3.

Na loterię przygotowano $3n$ losów: $2n$ pustych, $n - 1$ z kwotą wygrywającą 5 złotych oraz jeden z nagrodą główną N złotych. Każdy los na tej loterii kosztuje 5 złotych. Kupujemy jeden los za 5 złotych. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Dla jakiego N loteria jest sprawiedliwa?

Rozwiązanie

Niech X oznacza rozkład wygranej (lub straty):

wygrana/ strata	-5	0	N
prawdopodobieństwo	$2n/3n$	$(n - 1)/3n$	$1/3n$

Zgodnie z definicją mamy:

$$EX = \frac{2n}{3n} \cdot (-5) + \frac{n-1}{3n} \cdot 0 + \frac{1}{3n} \cdot N = \frac{-10n + N}{3n} = \frac{N - 10n}{3n}$$

Loteria jest sprawiedliwa wtedy, gdy $EX = 0$, czyli dla $N = 10n$.

Zadanie 4.

Na karteczkach napisano liczby: 1, 2, 3, 4, 5. Losujemy trzy karteczki. Niech $a < b < c$ będą liczbami napisanymi na tych trzech wylosowanych karteczkach. Oblicz wartość oczekiwaną liczby *b*.

Rozwiązanie

Oto możliwe wyniki losowań:

a	*b*	*c*
1	2	3
1	2	4
1	2	5
1	3	4
1	3	5
1	4	5
2	3	4
2	3	5
2	4	5
3	4	5

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia ustalonych liczb wynosi oczywiście 1/10.
Z powyższej poniższej tabelki mamy rozkład:

b	1	2	3	4	5
prawdopodobieństwo	0	3/10	4/10	3/10	0

Zgodnie z definicją mamy

$$EX = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{4}{10} + 4\cdot\frac{3}{10} + 5\cdot 0 = 3$$

Zadanie 5.

W pudełku znajduje się 10 kul oznaczonych liczbami od 1 do 10. Losujemy jedną kulę i zwracamy ją do pudełka. Następnie losujemy drugą kulę. Wyznacz wartość oczekiwaną iloczynu liczb napisanych na wylosowanych dwóch kulach.

Rozwiązanie

$$EX = 30\frac{1}{4}$$