

**EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI** - poziom rozszerzony  
 publikowany w 62. numerze *Świata Matematyki* (www.swiatmatematyki.pl)

(zadania zamknięte)

Zadanie	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	C	B	A	B

(zadania otwarte)

**Zadanie 6.**

Mamy  $W(x) = P(x)(x^2 + x - 2) + ax + b$ , gdzie  $P(x)$  jest pewnym wielomianem, natomiast  $ax + b$  jest poszukiwaną resztą. Mamy  $W(1) = 0$  i  $W(-2) = 3$  (dlaczego?). Zatem:

$$\begin{cases} P(1)(1^2 + 1 - 2) + a \cdot 1 + b = 0 \\ P(-2)((-2)^2 - 2 - 2) + a \cdot (-2) + b = 3, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + b = 3. \end{cases}$$

Stąd  $a = -1$  i  $b = 1$ .**Odp.** Poszukiwana reszta wynosi  $(-x + 1)$ .**Zadanie 7.**

Jeśli  $m^2 - 1 = 0$ , czyli  $m = 1$  lub  $m = -1$ , to mamy odpowiednio wielomiany  $W(x) = 1$  oraz  $W(x) = -4x + 1$ . Pierwszy z tych wielomianów jest stały i przyjmuje wartość dodatnią, a drugi nie spełnia warunku zadania (dlaczego?).

Założmy dalej, że  $m^2 - 1 \neq 0$ , czyli  $m \neq 1$  i  $m \neq -1$ . Wielomian  $W(x)$  jest wtedy trójmianem kwadratowym. Jego wykres musi być taki, jak to przedstawiają poniższe rysunki:

Zatem  $m^2 - 1 > 0$  i  $\Delta < 0$  lub  $\Delta = 0$ .

Wobec tego mamy układ nierówności:

$$\begin{cases} m^2 > 1 \\ 4(m-1)^2 - 4(m^2-1) \leq 0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \\ m \in (1; \infty), \end{cases}$$

stąd  $m \in (1, \infty)$ .**Odp.**  $m \in \{1\} \cup (1, \infty) = \langle 1, \infty \rangle$ .**Zadanie 8.**

Wiadomo, że jeśli  $a, b > 0$  i  $a \neq 1$  oraz  $k \neq 0$ , to  $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ . Założenie w zadaniu:  $x > 0$ . Mamy kolejno:

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11,$$

$$\begin{aligned}\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x &= 11, \\ \log_2 x &= 6, \\ x &= 2^6, \\ x &= 64.\end{aligned}$$

**Odp.** Mamy z założenia  $x > 0$ , a więc  $x = 64$ .

**Zadanie 9.**

Zauważmy, że  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ . Zatem podana nierówność przyjmuje postać:

$$(2 - \sqrt{3})^x + \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^x \leq 4.$$

Podstawmy  $t = (2 - \sqrt{3})^x$  ( $t > 0$ ). Wtedy:

$$\begin{aligned}t + \frac{1}{t} &\leq 4, & / \cdot t \\ t^2 + 1 &\leq 4t, & / -4t \\ t^2 - 4t + 1 &\leq 0.\end{aligned}$$

Mamy tu miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $t_1 = 2 - \sqrt{3}$ ,  $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ . Korzystając z wykresu funkcji kwadratowej, otrzymujemy:

$$2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3},$$

czyli

$$(2 - \sqrt{3})^1 \leq (2 - \sqrt{3})^x t \leq 2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1}.$$

Skoro  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ , to korzystając z faktu, że funkcja wykładnicza o podstawie mniejszej od jeden jest malejąca, otrzymujemy nierówności:

$$1 \geq x \geq -1.$$

**Odp.**  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .

**Zadanie 10.**

Mamy równania okręgów:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad (x+m)^2 + y^2 = m^2.$$

Powyższe równania przedstawiają okręgi odpowiednio o środkach  $S_1(-1, -2)$ ;  $S_2(-m, 0)$  i promieniach  $r_1 = 1$ ;  $r_2 = |m|$  (musi być  $m \neq 0$  – dlaczego?).

Warunek styczności zewnętrznej ma postać  $|S_1 S_2| = r_1 + r_2$ , czyli:

$$\begin{aligned}\sqrt{(-m+1)^2 + 2^2} &= 1 + |m|, \\ \sqrt{m^2 - 2m + 5} &= 1 + |m|.\end{aligned}$$

Skoro prawa strona powyższego równania jest dodatnia (dlaczego?), to:

$$\begin{aligned}m^2 - 2m + 5 &= (1 + |m|)^2, \\ m^2 - 2m + 5 &= 1 + 2|m| + |m|^2, \\ m^2 - 2m + 5 &= 1 + 2|m| + m^2, \\ 2m - 2|m| &= -4, \quad \text{gdzie } m \neq 0.\end{aligned}$$

**1°**  $m > 0$ . Wtedy:

$$\begin{aligned}-2m - 2m &= -4, \\ m &= 1\end{aligned}$$

i spełnione jest założenie.

**2°**  $m < 0$ . Wtedy:

$$\begin{aligned}-2m - 2(-m) &= -4, \\ 0 &= -4, \quad \text{co jest sprzeczne.}\end{aligned}$$

**Odp.**  $m = 1$ .

**Zadanie 11.**

Zgodnie ze wzorami Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego mamy równości:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \\ x_1x_2x_3 = 1. \end{cases}$$

Z pierwszej równości mamy:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0,$$

czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = 0.$$

Korzystając z drugiej nierówności, otrzymujemy:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6 = 0,$$

skąd

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 36,$$

czyli

$$(*) \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 = 36.$$

Podnosimy do kwadratu drugą równość, z wypisanych wzorów Viète'a:

$$\begin{aligned} (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 &= (-3)^2, \\ x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 &= 9, \\ x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) &= 9. \end{aligned}$$

Korzystając z wypisanych wzorów Viète'a, mamy:

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 9.$$

Stąd i z równości (\*) otrzymujemy

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 36 - 2(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2) = 36 - 2 \cdot 9 = 18.$$

**Odp.**  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18.$

**Zadanie 12.**

Niech  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  będą kątami trójkąta, zaś  $a \leq b \leq c$  będą jego bokami. Zgodnie z warunkami zadania mamy równości:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad \text{i} \quad b^2 = ac \quad (\text{dlaczego?}).$$

Z pierwszej równości wynika, że:

$$\beta = \frac{180^\circ - \beta}{2}, \quad \text{skąd} \quad \beta = 60^\circ.$$

Zapisujemy twierdzenie kosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta,$$

czyli:

$$ac = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60^\circ,$$

$$ac = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{1}{2},$$

$$ac = a^2 + c^2 - ac,$$

$$a^2 + c^2 - 2ac = 0,$$

$$(a - c)^2 = 0,$$

$$a = c.$$

Zatem  $a = c$  i w konsekwencji  $b^2 = ac = c \cdot c = c^2$ , skąd  $b = c$ .

Wobec tego  $a = b = c$ , co oznacza, że rozważany trójkąt jest równoboczny.

**Zadanie 13.**

Mamy kolejno:

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{\frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m}{\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{a_1 + a_m}{a_1 + a_n} = \frac{m}{n},$$

$$na_1 + na_m = ma_1 + ma_n,$$

$$na_1 + n(a_1 + (m-1)r) = ma_1 + m(a_1 + (n-1)r),$$

$$na_1 + na_1 + (mn-n)r = ma_1 + ma_1 + (mn-m)r,$$

$$2na_1 + mnr - nr = 2ma_1 + mnr - mr,$$

$$2na_1 - nr = 2ma_1 - mr,$$

$$n(2a_1 - r) = m(2a_1 - r),$$

$$(*) \quad (n-m)(2a_1 - r) = 0.$$

Jeśli  $m = n$ , to podana równość do udowodnienia jest oczywista.Jeśli  $m \neq n$ , to po podzieleniu obu stron równości (\*) przez  $n - m \neq 0$ , otrzymujemy:

$$2a_1 - r = 0,$$

a więc:

$$r = 2a_1.$$

W konsekwencji:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)r}{a_1 + (n-1)r} = \frac{a_1 + (m-1) \cdot 2a_1}{a_1 + (n-1) \cdot 2a_1} = \frac{1 + (m-1) \cdot 2}{1 + (n-1) \cdot 2} = \frac{2m-1}{2n-1},$$

co należało wykazać.

**Zadanie 14.**Oznaczmy przez  $x$  długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, która jest kwadratem oraz przez  $h$  wysokość tego prostopadłościanu. Mamy równania:

$$\begin{cases} V = x^2 h \\ P = 2x^2 + 4xh \text{ (dlaczego?)}. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy  $h = \frac{P - 2x^2}{4x}$ . Skoro  $h > 0$ , to  $2x^2 < P$ , czyli  $x < \sqrt{\frac{P}{2}}$ .

Z pierwszego równania mamy:

$$(*) \quad V = V(x) = x^2 \cdot \left( \frac{P - 2x^2}{4x} \right) = \frac{1}{4}Px - \frac{1}{2}x^3 \text{ dla } x \in \left( 0; \sqrt{\frac{P}{2}} \right).$$

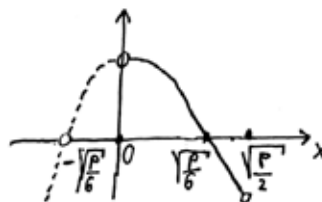
Obliczamy:

$$V'(x) = \frac{1}{4}P - \frac{3}{2}x^2 \text{ dla } x \in \left( 0; \sqrt{\frac{P}{2}} \right).$$

Łatwo wyznaczyć miejsca zerowe pochodnej:

$$x = -\sqrt{\frac{P}{6}} \text{ oraz } x = \sqrt{\frac{P}{6}}.$$

Oto wykres pochodnej:



Mamy:

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{6}}\right),$$

$$V'\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right) = 0,$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\sqrt{\frac{P}{6}}; \sqrt{\frac{P}{2}}\right).$$

Zatem funkcja  $x \mapsto V'(x)$  ma maksimum w punkcie  $x = \sqrt{\frac{P}{6}}$ .

Ze wzoru (\*) wyznaczamy:

$$V_{\max} = V\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right) = \frac{1}{4}P\sqrt{\frac{P}{6}} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right)^3 = \frac{P\sqrt{6P}}{36}.$$

### Zadanie 15.

Niech  $P(A_i)$  oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia  $A_i$ , polegającego na wylosowaniu kuli białej z  $i$ -tego pudełka dla  $i = 1, 2, 3$ .

Mamy:

$$P(A_1) = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}; \quad P(A_2) = \frac{n}{n+6}; \quad P(A_3) = \frac{n}{n+12}.$$

Niech  $P(A)$  oznacza prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w tym schemacie losowań.

Mamy wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot P(A_1) + \frac{1}{3} \cdot P(A_2) + \frac{1}{2} \cdot P(A_3),$$

czyli:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n+12} = \frac{1}{18} + \frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)}.$$

Zgodnie z warunkiem zadania  $P(A) > \frac{5}{18}$ , a więc:

$$(*) \quad \frac{1}{18} + \frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)} > \frac{5}{18},$$

$$\frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)} > \frac{4}{18}, \quad / \cdot 18(n+6)(n+12)$$

$$6n(n+12) + 3n(n+6) > 4(n+6)(n+12),$$

$$5n^2 + 18n - 288 > 0.$$

Rozwiązaniem powyższej nierówności jest  $n \in \left(-\infty; -9\frac{1}{3}\right) \cup (6; \infty)$ .

**Odp.** Skoro  $n$  jest liczbą naturalną, to  $n \in \{7, 8, 9, \dots\}$ .



W rozwiązaniu zadania, do wyprowadzenia zależności (\*) możemy także skorzystać z grafów. Prezentujemy jego najprostrzą wersję, zwaną „drzewem” (red.):

