Jaka to liczba?

Zadanie1.

Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest algebraiczna.

Rozwiązanie

Wykażemy, że liczba $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Mamy kolejno:

$x^3=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^3$,

$x^3=3+3*\sqrt{4}*\sqrt[3]{3}+3*\sqrt[3]{2}*\sqrt[3]{9}+3$,

$x^3=5+3*\sqrt[3]{6}*\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)$,

$x^3=5+3*\sqrt[3]{6}*x$, $(x^3-5)^3=\left(3*\sqrt[3]{6}*x\right)^3$,

$x^9-15x^6-87x^3-125=0$.

Zadanie 2.

Niech $n\geq 0$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że liczba $n^{\sqrt{n}}$ jest albo naturalna, albo jest przestępna.

Rozwiązanie

Jeśli $n\geq 0$ jest kwadratem liczby naturalnej: $n=k^2$ $(k\in N^+)$, to liczba

$$n^{\sqrt{n}}=(k^2)^{\sqrt{k^2}}=k^{2k}$$

jest naturalna.

Jeśli $n>0$ nie jest kwadratem liczby naturalnej, to liczba $\sqrt{n}$ jest niewymierna. Zatem, wobec algebraiczności liczb n i $\sqrt{n}$, z twierdzenia Gelfonda-Schneidera wynika, że liczba $n^{\sqrt{n}}$ jest przestępna.