Szkice rozwiązań, Jacek Kredenc

Nieznane wzory

Spróbuj wyznaczyć następujące zależności

a) wyraź funkcję $\cos 3\alpha$ za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α (najlepiej tylko przy pomocy funkcji $\cos\alpha$)

b) zapisz funkcję $\sin 6\alpha$ przy pomocy funkcji trygonometrycznych kąta α (najlepiej tylko przy pomocy funkcji $\sin\alpha$

c) wyznacz funkcję $\cot 4\alpha$ korzystając wyłącznie z funkcji trygonometrycznych kąta α (tylko przy pomocy funkcji $\cot\alpha$

Rozwiązanie:

a) Policzmy $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$

Z jednej strony

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

Z drugiej strony

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$= (\cos^2\alpha + i\sin\alpha\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$= \cos^3\alpha + i\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - i\sin^3\alpha + 2i\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha + 3i\sin\alpha\cos^2\alpha - i\sin^3\alpha =$$

$$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) + i\sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Więc

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)) =$$

$$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

b) Aby skorzystać z obliczeń wykonanych poprzednio wyznaczmy jeszcze $\sin 3\alpha$

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin\alpha(3(1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha) =$$

$$= \sin\alpha(3 - 3\sin^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Obliczmy teraz $(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)^2$

Z jednej strony

$$(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)^2 = \cos 6\alpha + i\sin 6\alpha$$

Z drugiej strony

$$(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)^2 = (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) =$$

$$= (\cos^2 3\,\alpha - \sin^2 3\,\alpha + 2i\sin 3\,\alpha\cos 3\alpha)$$

$$\sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) =$$

$$= 2(12\sin\alpha\cos^3\alpha - 9\sin\alpha\cos\alpha - 16\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 12\sin^3\alpha\cos\alpha) =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha(12\cos^2\alpha - 9 - 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 12\sin^2\alpha) =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha(3 - 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 2\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,(3 - 16\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)) =$$

$$= 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,(3 - 16\sin^2\alpha + 16\sin^4\alpha)$$

c) Częściowo wykorzystamy obliczenia z podpunktu a).

Należy wyliczyć $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4$

Z jednej strony

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$$

Z drugiej strony

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 =$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha) =$$

$$= \cos^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha - 2i\sin^3\alpha\cos\alpha +$$

$$+2i\sin\alpha\cos^3\alpha - 2i\sin^3\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4i\sin\alpha\cos^3\alpha + \sin^4\alpha - 4i\sin^3\alpha\cos\alpha$$

Mamy więc

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\cot 4\alpha = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} - \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{4\cos\alpha} - \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{4}\cot\alpha - \frac{1}{4}\tan\alpha - \frac{\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\cot\alpha - \frac{1}{4\cot\alpha} - \frac{\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1}$$