Bez Delty

Zad. 1.

Rozwiąż metodą arabską następujące równania:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$, b) $x^2 + 4x - 5 = 5$, c) $5x^2 + 3x + 7 = 0$.

Rozwiązanie

a) $\boldsymbol{4x^2 + 12x + 9 = 0}$

Zapiszmy równanie inaczej

$$4x^2 + 12x = -9$$

$$x^2 + 3x = -\frac{9}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x = -\frac{9}{4}$$

Zgodnie z artykułem ostatnie równanie jest równoważne równaniu

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

Z ostatniego równania wynika

$$x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

b) $\boldsymbol{x^2 + 4x - 5 = 5}$

Zapiszmy równanie inaczej

$$x^2 + 2x + 2x = 10$$

Zgodnie z artykułem ostatnie równanie jest równoważne równaniu

$$(x+2)^2 = x^2 + 2x + 2x + 4$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$(x+2)^2 = 10 + 4$$

$$(x+2)^2 = 14$$

Z ostatniego równania wynika

$$|x+2| = \sqrt{14}$$

I dalej

$$x + 2 = \sqrt{14} \quad lub \quad x + 2 = -\sqrt{14}$$

$$x = \sqrt{14} - 2 \quad lub \quad x = -\sqrt{14} - 2$$

c) $\boldsymbol{5x^2 + 3x + 7 = 0}$

Zapiszmy równanie inaczej

$$x^2 + \frac{3}{5}x = -\frac{7}{5}$$

$$x^2 + \frac{3}{10}x + \frac{3}{10}x = -\frac{7}{5}$$

Zgodnie z artykułem ostatnie równanie jest równoważne równaniu

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{10}x + \frac{3}{10}x + \frac{9}{100}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{7}{5} + \frac{9}{100}$$

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{131}{100}$$

Lewa strona równania jest nieujemna, a prawa ujemna, czyli równanie jest fałszywe, więc nie ma rozwiązania.

Zad. 2.

Rozwiąż równania kwadratowe z wartością bezwzględną

a) $x^2 - 4 \cdot |x| - 21 = 0$, b) $(|x| - 4)(1 - |x|) = 5$, c) $x^2 + |x - 1| = 0$.

Rozwiązanie

a) $x^2 - 4 \cdot |x| - 21 = 0$

Należy rozpatrzeć dwa przypadki.

Przypadek 1.

$$x < 0$$

Wówczas równanie ma postać

$$x^2 - 4 \cdot (-x) - 21 = 0$$

$$x^2 + 4x = 21$$

$$x^2 + 2x + 2x = 21$$

Co jest równoważne równaniu

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2x + 2x + 4$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$(x + 2)^2 = 21 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 25$$

Co prowadzi do równania

$$|x + 2| = 5$$

Mamy więc

$$x + 2 = 5 \quad lub \quad x + 2 = -5$$

Czyli

$$x = 3 \quad lub \quad x = -7$$

Ponieważ założyliśmy, że $x < 0$ więc $x = -7$

Przypadek 2.

$$x \geq 0$$

Wówczas równanie ma postać

$$x^2 - 4 \cdot x - 21 = 0$$

$$x^2 - 4x = 21$$

$$x^2 - 2x - 2x = 21$$

Co jest równoważne równaniu

$$(x-2)^2 = x^2 - 2x - 2x + 4$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$(x-2)^2 = 21 + 4$$

$$(x-2)^2 = 25$$

Co prowadzi do równania

$$|x-2| = 5$$

Mamy więc

$$x - 2 = 5 \quad lub \quad x - 2 = -5$$

Czyli

$$x = 7 \quad lub \quad x = -3$$

Ponieważ założyliśmy, że $x \geq 0$ więc $x = 7$

Ostatecznie

$$x = -7 \quad lub \quad x = 7$$

b)$\boldsymbol{(|x| - 4)(1 - |x|) = 5}$

Podobnie, jak poprzednio rozpatrujemy dwa przypadki

Przypadek 1.

$$x < 0$$

Wówczas równanie ma postać

$$(-x-4)\big(1-(-x)\big) = 5$$

$$(-x-4)(x+1) = 5$$

$$-x^2 - x - 4x - 4 = 5$$

$$-x^2 - 5x = 9$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x = -9$$

Co jest równoważne równaniu

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -9 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

Lewa strona równania jest nieujemna, a prawa ujemna, czyli równanie jest fałszywe, więc nie ma rozwiązania.

Przypadek 2.

$$x \geq 0$$

Wówczas równanie ma postać

$$(x - 4)(1 - x) = 5$$

$$-x^2 + x + 4x - 4 = 5$$

$$-x^2 + 5x = 9$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x = -9$$

Co jest równoważne równaniu

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -9 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

Lewa strona równania jest nieujemna, a prawa ujemna, czyli równanie jest fałszywe, więc nie ma rozwiązania.

To równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych

c) $\boldsymbol{x^2 + |x - 1| = 0}$

Jak poprzednio należy rozpatrzeć dwa przypadki

Przypadek 1.

$$x - 1 < 0$$

Wówczas

$$x < 1$$

Wówczas równanie) $x^2 + |x - 1| = 0$ ma postać

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = -1$$

Co jest równoważne równaniu

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

To równanie nie ma rozwiązania.

Przypadek 2.

$$x - 1 \geq 0$$

Wówczas

$$x \geq 1$$

Wówczas równanie) $x^2 + |x - 1| = 0$ ma postać

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = 1$$

Co jest równoważne równaniu

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Oznacza to, że

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Czyli

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad lub \;\; x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad lub \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ponieważ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1$, więc rozwiązaniem równania jest $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Zad. 3.

Zad. 3. Stosując metodę arabską rozwiązywania równań kwadratowych, znajdź gotowe wzory na rozwiązania równania: $ax^2 + b x + c = 0$; gdzie a; b; c należy do R i $a \neq 0$.

Rozwiązanie

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, zapiszmy następująco

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \quad oczywiście \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

Co prowadzi do równania równoważnego

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

Z uwagi na poprzednie równanie mamy

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Aby powyższe równanie miało rozwiązanie, musi zachodzić warunek

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} \geq 0$$

Ponieważ mianownik po lewej stronie jest dodatni jako kwadrat liczby 2a, więc musi być spełniony warunek

$$b^2-4ac \geq 0$$

Wróćmy do naszego równania

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Wynika z niego, że

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

czyli

$$x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad lub \quad x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad lub \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$