Jacek Kredenc

Trzy indukcje

Zadanie 1

W bajce o smoku odkryliśmy cechę podzielności przez 9. Fundamentalnym spostrzeżeniem, na którym oparło się wyprowadzenie tej cechy, był fakt, że każda liczba postaci: $10^n - 1$ dla *n* naturalnego, jest podzielna przez 9. Teraz udowodnij prawdziwość tego spostrzeżenia dla każdego *n* naturalnego.

Rozwiązanie:

1) Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 1$
$$10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$$
Ponieważ 9|9, więc warunek jest spełniony
2) Sprawdzamy, czy następujące zdanie jest prawdziwe dla dowolnego k naturalnego:
$$9|(10^k - 1) \Rightarrow 9|\left(10^{\mathrm{k}+1} - 1\right)$$
$$10^{\mathrm{k}+1} - 1 = 10^{\mathrm{k}} \cdot 10^1 - 1 = 10 \cdot 10^{\mathrm{k}} - 1 = 10 \cdot \left(10^{\mathrm{k}} - 1 + 1\right) - 1$$
$$= 10 \cdot \left(\left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) + 1\right) - 1 = \left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) \cdot 10 + 10 \cdot 1 - 1$$
$$= \left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) \cdot 10 + 10 - 1 = \left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) \cdot 10 + 9$$
Ponieważ, zgodnie z założeniem indukcyjnym $(10^k - 1)$ dzieli się przez 9, więc przez 9 dzieli się też $\left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) \cdot 10$. Przez 9 dzieli się tez 9, czyli $\left(10^{\mathrm{k}} - 1\right) \cdot 10 + 9$ dzieli się przez 9. Co należało udowodnić.

Zadanie 2

Udowodnij, że $n^7 - n$ jest podzielne przez 7.

Rozwiązanie:

1) Sprawdzamy prawdziwość warunku dla $n = 1$
$$1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$$
0 dzieli się przez każda liczbę, czyli dzieli się też przez 7. Warunek początkowy jest spełniony.
2) Sprawdzamy, teraz, czy następujące zdanie jest prawdziwe dla dowolnego k naturalnego
$$7|(k^7 - k) \Rightarrow 7|\left((k+1)^7 - (k+1)\right)$$

Zacznijmy, od wyznaczenia $(k+1)^7$
W tym celu wykorzystamy trójkąt Paskala.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Tak, więc mamy:

$$(k+1)^7 = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1$$

Możemy więc zapisać:

$$
\begin{aligned}
(k+1)^7 - (k+1) &= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1 \\
&= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 6k \\
&= (k^7 - k) + (7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k) \\
&= (k^7 - k) + 7 \cdot (k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)
\end{aligned}
$$

$(k^7 - k)$ dzieli się przez 7 z złożenia indukcyjnego. Reszta też dzieli się przez 7, więc całość dzieli się przez 7 co kończy dowód.

Zadanie 3.

Udowodnij, że $2^n > n^2$ dla $n \geq 5$.

Rozwiązanie:

1) Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 5$
   L: $2^5 = 32$
   P: $5^2 = 25$
   $$L > P$$
2) Sprawdzamy, teraz, czy następujące zdanie jest prawdziwe dla dowolnego k naturalnego większego od 5
   $$2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$$
   $$L: 2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^k \overset{\text{na mocy złożenia indukcyjnego}}{>} 2k^2$$
   Trzeba jeszcze udowodnić, że dla $k \geq 5$ $2k^2 \geq (k+1)^2$
   $$2k^2 \geq (k+1)^2$$
   $$2k^2 \geq k^2 + 2k + 1 \qquad /-(k^2 + 2k + 1)$$
   $$k^2 - 2k - 1 \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$k_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Ponieważ $a > 0$, więc $k^2 - 2k - 1 \geq 0$ jest spełnione dla$k < 1 - \sqrt{2}\ i\ \ k > 1 + \sqrt{2}$.
Ponieważ $1 + \sqrt{2} < 5$, więc dla $k \geq 5$, $k^2 - 2k - 1 \geq 0$, co oznacza, że dla $k \geq 5$ $2k^2 \geq (k+1)^2$. Co należało dowieść.