Jacek Kredenc

Liczby Fibonacciego

Stosując zasadę indukcji matematycznej, dla wyrazów ciągu Fibonacciego, wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość:

a) $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$
b) $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$
c) $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$
Uwaga!!! W zadaniu c). był błąd zapisu uniemożliwiający rozwiązanie zadania.

Rozwiązania

Ad. a)

1) Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n = 1$
L: $f_1 = 1$
P: $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$
L=P
2) Sprawdzamy, czy spełniony jest warunek indukcyjny; to znaczy, czy z założenie, że dla pewnego $k \geq 1$ równość
$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = f_{k+2} - 1$$
Implikuje równość
$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k + f_{k+1} = f_{(k+1)+2} - 1 = f_{k+3} - 1$$
Zacznijmy przekształcanie od strony lewej:
$$L = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k + f_{k+1}$$
$$= (f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k) + f_{k+1} \overset{z\ założenia\ indukcyjnego}{\cong} f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+1} + f_{k+2} - 1$$
$$= (f_{k+1} + f_{k+2}) - 1 \overset{z\ definicji\ ciągu\ f}{\cong} f_{k+3} - 1 = P$$
Co kończy dowód

Ad. b)

1) Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n = 1$
L: $f_1 = 1$
P: $f_{2\cdot 1} = f_2 = 1$
L=P

2) Sprawdzamy, czy spełniony jest warunek indukcyjny; to znaczy, czy z założenie, że dla pewnego $k \geq 1$ równość

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} = f_{2k}$$

Implikuje równość

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1} = f_{2(k+1)}$$

Zapiszmy tezę trochę prościej

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k+2}$$

Zacznijmy przekształcanie od strony lewej:

$$L = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1}$$
$$= (f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1}) + f_{2k+1} \overset{z\ założenia\ indukcyjnego}{=} f_{2k} + f_{2k+1} \overset{z\ definicji\ ciągu\ f}{=} f_{2k+2} = P$$

Co kończy dowód

Ad. c)

1) Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n = 1$

L: $f_{2\cdot 1} = f_2 = 1$

P: $f_{2\cdot 1+1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$

L=P

2) Sprawdzamy, czy spełniony jest warunek indukcyjny; to znaczy, czy z założenie, że dla pewnego $k \geq 1$ równość

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$$

Implikuje równość

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2k} + f_{2(k+1)} = f_{2(k+1)+1} - 1$$

Zapiszmy tezę trochę prościej

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2k} + f_{2k+2} = f_{2k+3} - 1$$

Zacznijmy przekształcanie od strony lewej:

$$L = f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2k} + f_{2k+2}$$
$$= (f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2k}) + f_{2k+2} \overset{z\ założenia\ indukcyjnego}{=} f_{2k+1} - 1 + f_{2k+2} = (f_{2k+1} + f_{2k+2}) - 1 \overset{z\ definicji\ ciągu\ f}{=} f_{2k+3} - 1 = P,$$

co kończy dowód.