Marian Maciocha

Prosta definicja

Zadanie:

Liczby x są to takie liczby rzeczywiste, w których:

$$x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

W jaki sposób możemy uprościć powyższą definicję zbioru liczb x ?

Pierwszy sposób rozwiązania zadania:

Zajmijmy się równością: $x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$ (gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą):

$$x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi = -\frac{13\pi}{7} + [2 + (k-2)]\pi = -\frac{13\pi}{7} + 2\pi + (k-2)\pi =$$

$$= -\frac{13\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} + (k-2)\pi = \frac{\pi}{7} + (k-2)\pi =$$

Niech $(k - 2) = m$. Ponieważ k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba m może być dowolną liczbą całkowitą. Zatem

$x = \frac{\pi}{7} + m\pi$, gdzie: m – dowolna liczba całkowita.

Oczywiście nie ma znaczenia to, jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$x = \frac{\pi}{7} + k\pi$, gdzie: k – dowolna liczba całkowita.

Zajmijmy się równością: $x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$ (gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą):

$$x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{[1 + (k-1)]\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi + (k-1)\pi}{4} =$$

$$= -\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{7\pi}{28} + \frac{(k-1)\pi}{4} = \frac{4\pi}{28} + \frac{(k-1)\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{7} + \frac{(k-1)\pi}{4}.$$

Niech $(k - 1) = m$. Ponieważ k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba m może być dowolną liczbą całkowitą. Zatem

$x = \frac{\pi}{7} + \frac{m\pi}{4}$, gdzie: m to dowolna liczba całkowita.

Oczywiście nie ma znaczenia to jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

Wracamy do alternatywy:

$x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$ lub $x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Równoważną alternatywę możemy zapisać w postaci:

$x = \frac{\pi}{7} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

Zajmijmy się równością: $x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$ (gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą).

Jeśli liczbę całkowitą k podzielimy przez 4, to wynikiem tego dzielenia jest pewna liczba całkowita m i reszta z dzielenia, która może być równa: 0 lub 1 lub 2 lub 3. Możemy zapisać to w następujący sposób:

$\left(\dfrac{k}{4} = m \quad \text{reszta } 0 \right)$ lub $\left(\dfrac{k}{4} = m \quad \text{reszta } 1 \right)$ lub $\left(\dfrac{k}{4} = m \quad \text{reszta } 2 \right)$

lub $\left(\dfrac{k}{4} = m \quad \text{reszta } 3 \right)$,

czyli $k = 4m$ lub $k = 4m + 1$ lub $k = 4m + 2$ lub $k = 4m + 3$.

Dlatego równość: $x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k\pi}{4}$ (gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą) możemy

zapisać następująco:

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{4m\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{(4m+1)\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{(4m+2)\pi}{4}$$

$$\text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{(4m+3)\pi}{4} \, .$$

Stąd

$$x = \frac{\pi}{7} + m\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + m\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + m\pi + \frac{2\pi}{4}$$

$$\text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + m\pi + \frac{3\pi}{4}$$

Co wiemy o liczbie m ?
Jeśli liczba k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba m może być dowolną liczbą całkowitą.
Oczywiście nie ma znaczenia to jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższą alternatywę możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{7} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + k\pi + \frac{2\pi}{4}$$

lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$, gdzie: k tp dowolna liczba całkowita.

Wracamy do alternatywy:

$x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k\pi}{4}$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

i otrzymujemy:

$x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{2\pi}{4}$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$,

gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

Stąd

$x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{2\pi}{4}$

lub $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

czyli

$x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{4k}{4}\pi$ lub $x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{4k + 1}{4}\pi$ lub $x = \dfrac{1}{7} + \dfrac{4k + 2}{4}\pi$

lub $x = \dfrac{1}{7} + \dfrac{4k + 3}{4}\pi$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

Liczby o postaci $4k$ lub $(4k + 1)$ lub $(4k + 2)$ lub $(4k + 3)$
(gdzie: k to dowolna liczba całkowita), to liczby całkowite.
Dlatego powyższą alternatywę możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{m\pi}{4}$$, gdzie: m to dowolna liczba całkowita.

Oczywiście nie ma znaczenia to jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższe zdanie możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$$, gdzie: k to dowolna liczba całkowita.

<u>Drugi sposób rozwiązania zadania:</u>

Początek drugiego sposobu rozwiązania zadania jest taki sam jak początek pierwszego sposobu rozwiązania zadania:

Zajmijmy się równością: $x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$ *(gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą):*

$$x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi = -\frac{13\pi}{7} + [2 + (k-2)]\pi = -\frac{13\pi}{7} + 2\pi + (k-2)\pi =$$

$$= -\frac{13\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} + (k-2)\pi = \frac{\pi}{7} + (k-2)\pi =$$

Niech $(k-2) = m$. *Ponieważ k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba m może też być dowolną liczbą całkowitą. Zatem*

$$x = \frac{\pi}{7} + m\pi$$, *gdzie: m – dowolna liczba całkowita.*

Oczywiście nie ma znaczenia to jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{7} + k\pi$$, *gdzie: k to dowolna liczba całkowita.*

Zajmijmy się równością: $x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$ *(gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą):*

$$x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{[1 + (k-1)]\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi + (k-1)\pi}{4} =$$

$$= -\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{4} = -\frac{3\pi}{28} + \frac{7\pi}{28} + \frac{(k-1)\pi}{4} = \frac{4\pi}{28} + \frac{(k-1)\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{7} + \frac{(k-1)\pi}{4}.$$

Niech $(k-1) = m$. Ponieważ k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba m może być dowolną liczbą całkowitą. Zatem

$x = \frac{\pi}{7} + \frac{m\pi}{4}$, *gdzie: m to dowolna liczba całkowita.*

Oczywiście nie ma znaczenia to jaką literą oznaczymy dowolną liczbę całkowitą, dlatego powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, *gdzie: k – dowolna liczba całkowita.*

Wracamy do alternatywy:

$x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$ *lub* $x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$, *gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.*

Równoważną alternatywę możemy zapisać w postaci:

$x = \frac{\pi}{7} + k\pi$ *lub* $x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, *gdzie: k to dowolna liczba całkowita.*

Niech zbiór X_1 będzie zbiorem takich liczb x_1, w których: $x_1 = \frac{\pi}{7} + k\pi$.

Każda liczba x_1 jest równa sumie $\frac{\pi}{7}$ i całkowitej wielokrotności liczby π.

Niech zbiór X_2 będzie zbiorem takich liczb x_2, w których: $x_2 = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$.

Dla każdej liczby k podzielnej przez 4 każda liczba x_2 jest równa sumie

$\frac{\pi}{7}$ i całkowitej wielokrotności liczby π.

Zatem zbiór X_1 jest podzbiorem zbioru X_2. Dlatego alternatywę:

$$x = \frac{\pi}{7} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$$

możemy zapisać w prostszej postaci:

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4} \; .$$

<u>Trzeci (GRAFICZNY) sposób rozwiązania zadania:</u>

Na papierze w kratkę przyjmujemy, że jedna kratka oznacza $\frac{\pi}{4}$. Rysunki zamieszczono w pliku SM37_Prosta_definicja_rys.jpg

Na rys. 1. zaznaczamy na osi OX zbiór X_1 liczb x_1 takich, że $x_1 = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$,

gdzie: k – dowolna liczba całkowita.

Na rys. 2. zaznaczamy na osi OX zbiór X_2 liczb x_2 takich, że $x_2 = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$,

gdzie: k – dowolna liczba całkowita.

Na rys. 3. zaznaczamy na osi OX zbiór X liczb x takich, że:

$x = -\frac{3\pi}{28} + \frac{k\pi}{4}$ lub $x = -\frac{13\pi}{7} + k\pi$, gdzie: k – dowolna liczba całkowita.

Z rys. 3. wynika, że zbiór X zbiór jest zbiorem liczb x takich, że:

$x= \frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie: k – dowolna liczba całkowita.