

# Rozwiązania zadań maturalnych

(Zadania maturalne zamieszczone w czasopiśmie Świat Matematyki nr 73)

1.

$$(x - 3)^2(x + y) \leq 0$$

Ponieważ  $(x - 3)^2$  jest zawsze większe lub równe 0, więc

$$x + y \leq 0$$

A to zachodzi gdy

$$x \leq -y \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Uwaga. W druku pojawił się błąd. Dla treści  $(x - 3)^2(x + 1) \leq 0$  rozwiązaniem jest  $x \leq -1$  lub  $x = 3$

2.

Zgodnie z treścią zadania mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{x+m} & i & & g(x) &= 3^{2x-3} \\ f(4) &= 3^{4+m} & i & & g(4) &= 3^5 \end{aligned}$$

Zgodnie z warunkiem zadania mamy

$$f(4) = g(4)$$

$$3^{4+m} = 3^5$$

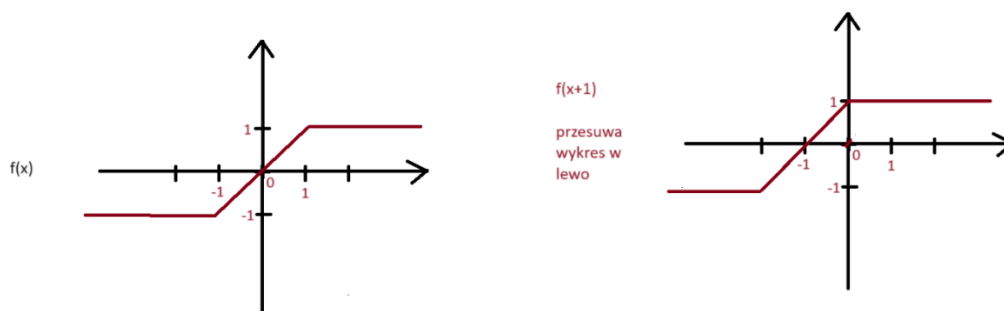
Równanie zachodzi, gdy

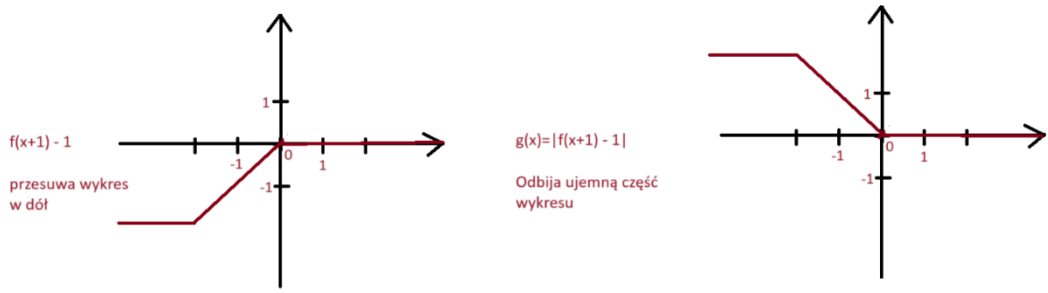
$$4 + m = 5$$

Więc

$$m = 1$$

3.





4.

Funkcja

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{x^2+10}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$$

Jest w punkcie  $x = 0$  nie ciągła, gdyż dla argumentu  $x = 0$  funkcja  $f(x)$  zmierza do  $\frac{1}{2}$

5.

$$W(x) = (x^2 - 4)(x - m)$$

Dwoma pierwiastkami tego wielomianu są  $x = -2$  i  $x = 2$ . Trzecim pierwiastkiem tego wielomianu będzie  $x = m$ . Możliwe są trzy przypadki

- I.  $m < -2$ . Wówczas  $m = -6$  i otrzymujemy ciąg  $\{-6; -2; 2\}$
- II.  $-2 < m < 2$ . Wówczas  $m = 0$  i otrzymujemy ciąg  $\{-2; 0; 2\}$
- III.  $m > 2$ . Wówczas  $m = 6$  i otrzymujemy ciąg  $\{-2; 2; 6\}$

6.

Jeżeli ciąg  $a_n$  jest arytmetyczny, to zachodzą warunki

$$a_{n+1} = a_n + r \quad i \quad a_{n+2} = a_n + 2r$$

Trzy kolejne wyrazy ciągu  $b_n$  to  $\{2^{a_n}; 2^{a_n+r}; 2^{a_n+2r}\}$

Sprawdźmy, czy iloraz kolejnych wyrazów tego ciągu jest stały

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_n+r}}{2^{a_n}} = \frac{2^{a_n} \cdot 2^r}{2^{a_n}} = 2^r$$

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{2^{a_n+2r}}{2^{a_n+r}} = \frac{2^{a_n} \cdot (2^r)^2}{2^{a_n} \cdot 2^r} = 2^r$$

Czyli otrzymany ciąg jest geometryczny.

7.

Zauważmy, że podana suma jest nieskończonym szeregiem geometrycznym o ilorazie  $\frac{1}{100}$ .

Zatem

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{11}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}$$

8.

$$A = (2; -1); \quad B = (1+a; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = [1+a-2; -1] = [-1+a; -1]$$

$$\vec{u} = [2+a; 1]$$

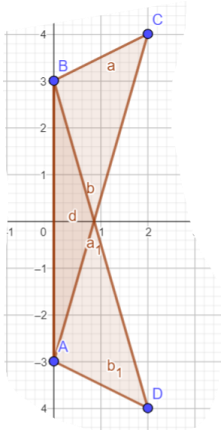
$$1-a = 2+a$$

$$-1 = 2a$$

$$a = -0,5$$

9.

$$A = (0; -3); \quad B = (0; 3); \quad C = (2; 4); \quad D = (2; -4)$$



Jak łatwo zauważyć, oba trójkąty mają jeden wspólny bok, a dwa pozostałe są parami równej długości, więc oba trójkąty są przystające.

10.

$$Z(t) = 0,8M(t) + 0,3D(t) + 0,1F(t) + 0,2B(t)$$

Gdzie

$$M(t) = 1,92 + 0,01t - 0,002t^2$$

$$D(t) = 3,42 - 0,02t + 0,003t^2$$

$$F(t) = 0,51 - 0,02t - 0,012t^2$$

$$B(t) = 5,84 - 0,01t - 0,001t^2$$

Zatem

$$\begin{aligned}
Z(t) &= 0,8 \cdot (1,92 + 0,01t - 0,002t^2) + 0,3 \cdot (3,42 - 0,02t + 0,003t^2) + 0,1 \\
&\quad \cdot (0,51 - 0,02t - 0,012t^2) + 0,2 \cdot (5,84 - 0,01t - 0,001t^2) = \\
&= 1,536 + 0,008t - 0,0016t^2 + 1,026 - 0,006t + 0,0009t^2 + 0,051 - 0,002t \\
&\quad - 0,0012t^2 + 1,168 - 0,002t - 0,0002t^2 = \\
&= -0,0021t^2 - 0,002t + 3,781
\end{aligned}$$

$Z(t)$  okazało się funkcją kwadratową skierowaną ramionami w dół. Największą wartość otrzymuje dla

$$t = -\frac{0,002}{0,0042} = -20:42 \approx -0,476$$

Ponieważ  $t \geq 0$  i  $t$  całkowite, więc indeks giełdowy będzie największy w początkowym dniu i wyniesie 3, 781. Najmniejszą wartość indeks giełdowy wyniesie w ostatnim dniu czyli 14 dnia i wyniesie on

$$Z(14) = -0,0021 \cdot 14^2 - 0,002 \cdot 14 + 3,781 = -0,4116 - 0,028 + 3,781 = 3,3414$$

**11.**

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 3 + 2(n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \geq 1000$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 3 + 2(n - 1)}{2} \cdot n = (3 + n - 1) \cdot n = (2 + n) \cdot n$$

Należy rozwiązać nierówność

$$(n + 2) \cdot n \geq 1000$$

$$n^2 + 2n - 1000 \geq 0$$

Rozwiążmy równanie

$$n^2 + 2n - 1000 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4000 = 4004$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4004} = 2\sqrt{1001}$$

$$n = \frac{-2 - 2\sqrt{1001}}{2} = -1 - \sqrt{1001} < 0 \quad \text{lub} \quad n = \frac{-2 + 2\sqrt{1001}}{2} = \sqrt{1001} - 1$$

Parabola ma ramiona skierowane do góry, więc

$$n \leq -1 - \sqrt{1001} \quad \text{lub} \quad n \geq \sqrt{1001} - 1$$

Ponieważ  $n > 0$ , więc pozostaje druga nierówność

$$n \geq \sqrt{1001} - 1$$

Zatem

$$n = 32$$

Bo  $n$  jest naturalne.

**12.**

a)

$$|OA'| = |OA| + 2$$

$$|OA| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Podobnie można obliczyć, że

$$|OB| = 13$$

Zatem

$$|OA'| = |OB'| = 15$$

Punkty  $A$  i  $A'$  leżą na półprostej o równaniu

$$y = ax$$

Wyznaczmy  $a$  wiedząc, że  $A = (12; 5)$

Mamy

$$5 = 12a$$

$$a = \frac{5}{12}$$

Niech

$$A' = (x'; y')$$

Wówczas

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 15^2 \\ \frac{y'}{x'} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 225 \\ y' = \frac{5}{12} \cdot x' \end{cases}$$

$$(x')^2 + \left(\frac{5}{12} \cdot x'\right)^2 = 225$$

$$(x')^2 + \frac{25}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$\frac{169}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$(x')^2 = \frac{225 \cdot 144}{169}$$

$$x' = \frac{15 \cdot 12}{13} = \frac{180}{13} \quad \text{lub} \quad x' = -\frac{180}{13}$$

Ponieważ punkty A i A' leżą na tej samej półprostej o początku O, więc pozostaje tylko  $x' = \frac{180}{13}$

$$y' = \frac{5}{12} \cdot \frac{180}{13} = \frac{75}{13}$$

$$A' = \left( \frac{180}{13}; \frac{75}{13} \right)$$

Punkty B i B' leżą na półprostej o równaniu

$$y = ax$$

Wyznaczmy  $a$  wiedząc, że  $B = (-12; 5)$

Mamy

$$5 = -12a$$

$$a = -\frac{5}{12}$$

Niech

$$B' = (x'; y')$$

Wówczas

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 15^2 \\ \frac{y'}{x'} = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 225 \\ y' = -\frac{5}{12} \cdot x' \end{cases}$$

$$(x')^2 + \left( -\frac{5}{12} \cdot x' \right)^2 = 225$$

$$(x')^2 + \frac{25}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$\frac{169}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$(x')^2 = \frac{225 \cdot 144}{169}$$

$$x' = \frac{15 \cdot 12}{13} = -\frac{180}{13} \quad \text{lub} \quad x' = \frac{180}{13}$$

Ponieważ punkty B i B' leżą na tej samej półprostej o początku O, więc pozostaje tylko  $x' = -\frac{180}{13}$

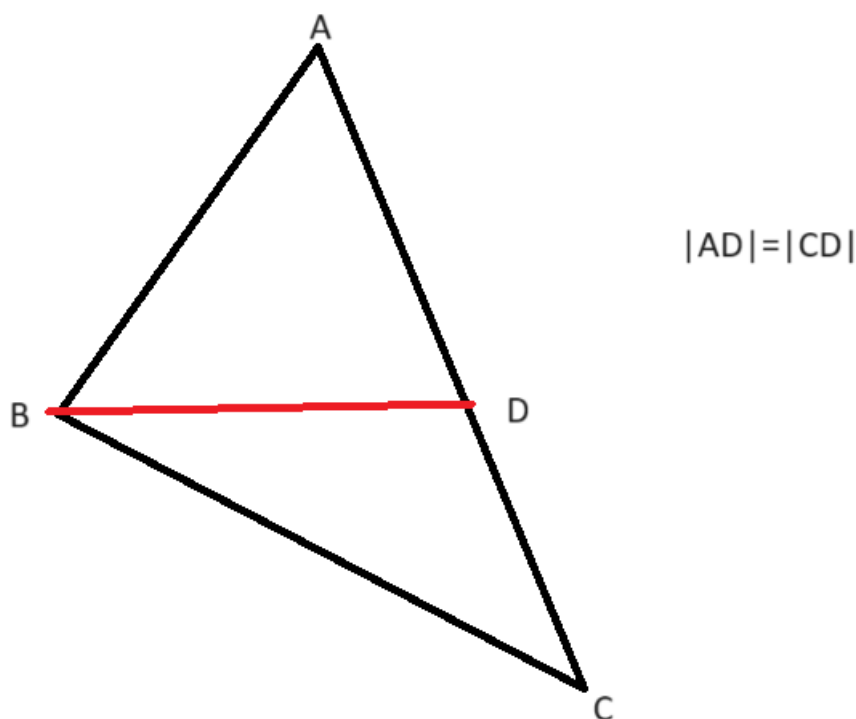
$$y' = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{180}{13}\right) = \frac{75}{13}$$

$$B' = \left(-\frac{180}{13}; \frac{75}{13}\right)$$

**b)**

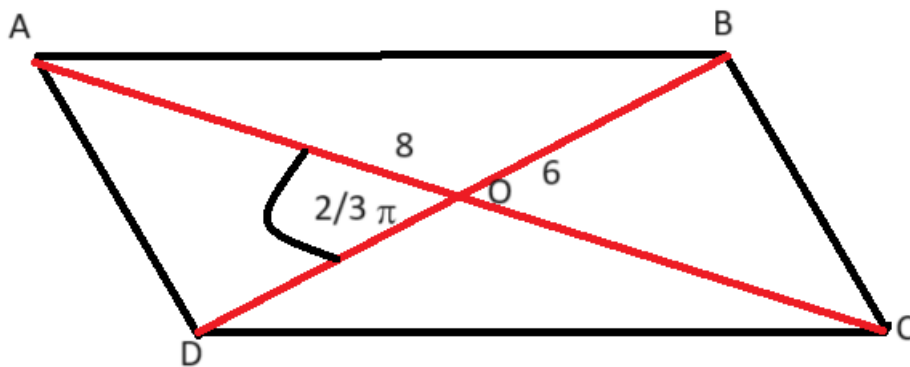
To przekształcenie nie jest izometrią ponieważ nie zachowuje odległości punktu i jego obrazu od początku układu współrzędnych.

**13.**



Przyjmijmy, że AC jest podstawą trójkąta ABC. Wówczas podstawą trójkąta ABD jest AD, a podstawą trójkąta BDC jest CD. Oba trójkąty mają tę samą wysokość, czyli mają te same pola.

**14.**



$$|AD|^2 = |OA|^2 + |OD|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OD| \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \pi\right)$$

$$|AD|^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|AD|^2 = 25 - 12 = 13$$

$$|AD| = \sqrt{13}$$

15.

Niech

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Wówczas

$$2x_1 + 3 \leq 2x_2 + 3$$

$$2x_1 \leq 2x_2$$

$$x_1 \leq x_2$$

Co należało wykazać

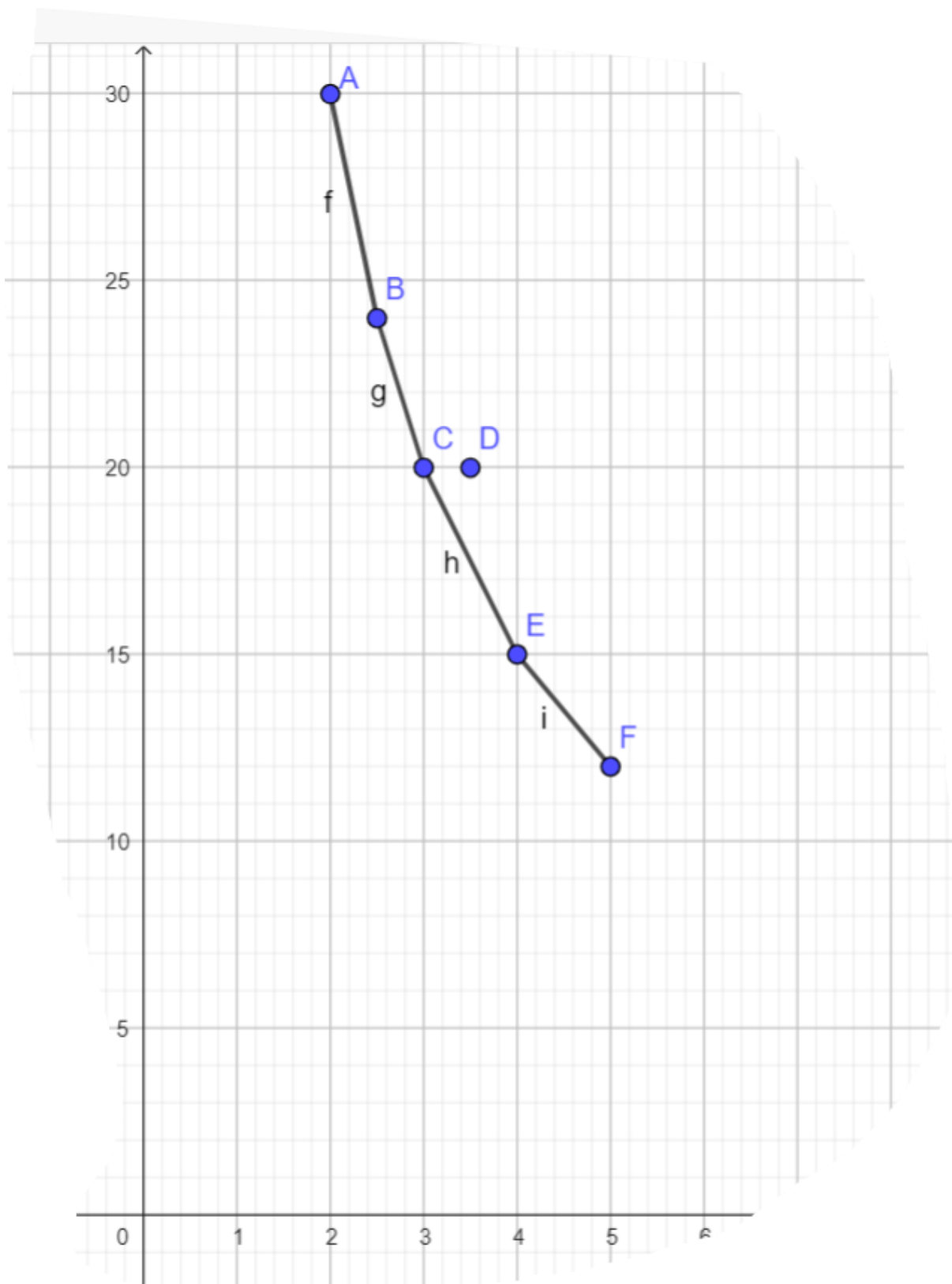
16.

Funkcja  $f(x) = x^2 - 6x + 1$  której wykres jest parabolą o ramionach skierowanych ku górze. Najniższym punktem tej paraboli jest jej wierzchołek  $W = (3; -8)$ . Przedział  $\langle 0; 2 \rangle$  leży na lewo od wierzchołka, czyli najniższa wartość tej funkcji, to wartość w prawym końcu przedziału czyli  $f(2)$

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = 4 - 12 + 1 = -7$$

17.





Na wykresie wyraźnie widać, że odstaje punkt  $D = (3,5; 20)$  i ten odczyt jest właśnie błędny.

Szukana zależność, to

$$p = \frac{60}{V}$$