Świat Matematyki nr 68: „Konkurs (po)ciągu nieskończonego”
(rozwiązanie)

ZADANIE

Wykaż, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach całkowitych dodatnich i takich, że w ciągach tych od pewnego wyrazu następują same zera, ma moc równą zbiorowi liczb naturalnych.

ROZWIĄZANIE

Oznaczam zbiór wszystkich ciągów nieskończonych z treści zadania przez **K**.
Każdy ciąg nieskończony będący elementem zbioru **K** możemy - po usunięciu końcowych zer - zapisać jako liczbę całkowitą dodatnią (naturalną), która nie kończy się zerem, czyli jest niepodzielna przez 10. Każde dwa różne elementy zbioru **K** wygenerują w ten sposób dwie różne liczy naturalne.
I na odwrót: każda liczba naturalna niepodzielna przez 10, po uzupełnieniu po prawej stronie nieskończoną serią zer stanie się elementem zbioru **K**.
Wniosek: zbiór **K** jest równoliczny ze zbiorem **L** składającym się ze wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 10.

1) Wykażę, że zbiór **L** jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych **N** budując wzajemnie jednoznaczną relację pomiędzy elementami tych dwóch zbiorów.
   a) Każdemu elementowi x ze zbioru **L** przyporządkowujemy liczbę naturalną $n = x - [x/10]$, gdzie zapis [y] oznacza część całkowitą liczby y.
      Przykładowo: dla liczb x z przedziału <1, 9> składnik *[x/10]* = 0 więc w tym przedziale n = x.
      Dla x z przedziału <11, 19> mamy *[x/10]* = 1 i dla x = 11 otrzymujemy n = 10, a kolejno: x = 11, …, 18.
      Dla x z przedziału <21,29> mamy *[x/10]* = 2 co daje kolejno: n = 19. 22, …, 27
      Itd.
   b) Każdej liczbie naturalnej n przyporządkowujemy liczbę $x = n + [(n-1)/9]$ ze zbioru **L**.
      Przykładowo: dla liczb n <=9 składnik *[(n-1)/9]* jest równy 0 więc w tym przedziale x = n.
      Dla n z przedziału <10, 18> mamy *[(n-1)/9]* = 1 i dla n = 10 otrzymujemy x = 11, a kolejno: x = 12, …, 19.
      Dla n z przedziału <19,27> mamy *[(n-1)/9]* = 2 co daje kolejno: x = 21. 22, …, 29
      Itd.

   Wzajemnie jednoznaczne relacja pomiędzy elementami zbiorów **L** i **N** oznacza, że te zbiory mają taką samą moc.

2) Równoliczność zbiorów nieskończonych L i N można też wykazać inaczej, bez budowania wzajemnie jednoznacznej relacji pomiędzy elementami tych zbiorów. W tym celu wykorzystam dwa spostrzeżenia:
   a) Każdy zbiór nieskończony ma liczbę kardynalną nie mniejszą niż liczba kardynalna zbioru **N** liczb naturalnych (nie ma zbiorów nieskończonych o mocy mniejszej niż zbiór **N**).
   b) Dla każdego zbioru **A** jego dowolny podzbiór **B** ma moc nie wyższą niż moc zbioru **A**.

   Ponieważ zbiór **L** jest podzbiorem zbioru **N** (z pominięciem liczb podzielnych przez 10) więc korzystając ze spostrzeżeń a) i b) uzyskujemy bezpośrednio, że zbiór **L** ma moc zbioru liczb naturalnych.

Kazimierz (Rzeszów)