Kazimierz Korfanty
Konkurs SM62: „KONKURS ŚWIATŁA"

Szukana odległość żarówki ponad środkiem stołu to $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

ROZWIĄZANIE

Uwaga: W treści wskazówki do zadania jest błąd. Oświetlenie jest odwrotnie proporcjonalne NIE do kwadratu odległości punktowego źródła światła od danej powierzchni, ale do kwadratu odległości tego źródła światła od danego punktu na powierzchni.

Oznaczam przez
- x - odległość żarówki umieszczonej ponad środkiem stołu o promieniu r od środka tegoż stołu
- d - odległość żarówki do obwodu stołu,
- α - kąt, pod którym promienie światła z żarówki podają na obwód stołu.

gdzie $\sin\alpha = \frac{x}{d}$ oraz $d = \sqrt{x^2 + r^2}$

Zgodnie z prawem optyki oświetlenie na obwodzie stołu jest więc równe: $k\frac{\sin\alpha}{d^2}$.
Pomijając współczynnik k wielkość oświetleni na obwodzie stołu w zależności od x (odległość żarówki ponad środkiem stołu) przedstawia funkcja:

$$f(x) = \frac{x}{d^3} = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+r^2}\right)^3} = x \cdot (x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Funkcję analizuję dla dziedziny $x > 0$.
Funkcja f(x) osiąga maksimum dla wartości x_{max}, dla której pierwsza pochodna f'(x) osiąga 0, oraz:
- dla $x < x_{max}$ pochodna $f'(x) > 0$ (czyli funkcja f(x) jest rosnąca),
- dla $x > x_{max}$ pochodna $f'(x) < 0$ (czyli funkcja f(x) jest malejąca).

Do obliczenia pochodnej stosuje wzory na:
- pochodną funkcji potęgowej: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- pochodną iloczynu funkcji: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- pochodną funkcji złożonej: $\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Tak więc:

$$\begin{aligned} f'(x) = \; & (x)' \cdot (x^2 + r^2)^{-3/2} + x \cdot ((x^2 + r^2)^{-3/2})' = \\ & (x^2 + r^2)^{-3/2} + x \cdot ((-3/2) \cdot (x^2 + r^2)^{-5/2} \cdot 2x) = \\ & (x^2 + r^2)^{-5/2} \cdot ((x^2 + r^2) - 3/2 \cdot 2x^2) = \\ & (x^2 + r^2)^{-5/2} \cdot (r^2 - 2x^2) \end{aligned}$$

Pochodna $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(r^2 - 2x^2) = 0$, co dla $x > 0$ zachodzi dla $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Jednocześnie $f'(x) > 0$ gdy $(r^2 - 2x^2) > 0$, a to zachodzi dla $0 < x < \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Analogicznie $f'(x) < 0$ dla $x > \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Oznacza to, że dla $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ funkcja f(x) osiąga maksimum.