szkic rozwiązania – Jacek Kredenc

Trzeci stopień

Rozwiąż poniższe równania

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
b) $x^3 + 6x^2 + 3x - 2 = 0$
c) $x^3 + 6x^2 - 20x - 56 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 24x + 64 = 0$
e) $x^3 + 24x - 16 = 0$
f) $x^3 - 6x^2 + 15x - 18 = 0$
g) $x^3 - 6x^2 + 27x - 58 = 0$
h) $x^3 - 9x - 12 = 0$
i) $x^3 - 6x^2 - 15x - 8 = 0$
j) $x^3 - 3x^2 - 27x + 41 = 0$
k) $x^3 + 6x^2 + x - 14 = 0$

Rozwiązania

Rozwiąż równania:

a).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Zgodnie z twierdzeniem Bezouta, całkowity pierwiastek równania jest dzielnikiem wyrazu wolnego, więc pierwiastkiem powyższego równania może być liczba

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Więc $x = 1$ jest jednym z pierwiastków naszego równania

Obniżmy stopień wielomianu

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x - 1) = x^2 - 5x + 6$$

$$\underline{-x^3 + x^2}$$

$$-5x^2 + 11x - 6$$

$$\underline{5x^2 - 5x}$$

$$6x - 6$$

$$\underline{-6x + 6}$$

$$= \qquad =$$

Rozwiążmy więc równanie kwadratowe

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad lub \qquad x = \frac{5+1}{2} = 3$$

Rozwiązaniami równania są liczby: 1; 2 i 3

b)

$$x^3 + 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

Pierwiastkami całkowitymi tego równania mogą być liczby

$$\pm 1 \qquad i \qquad \pm 2$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 + 6 + 3 - 2 = 8$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 6 - 3 - 2 = 0$$

Więc $x = -1$ jest jednym z pierwiastków naszego równania

Obniżmy stopień wielomianu

$$(x^3 + 6x^2 + 3x - 2) : (x + 1) = x^2 + 5x - 2$$

$$\underline{-x^3 - x^2}$$

$$5x^2 + 3x - 2$$

$$\underline{-5x^2 - 5x}$$

$$-2x - 2$$

$$\underline{2x + 2}$$

$$= \quad =$$

Rozwiążmy więc równanie kwadratowe

$$x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 + 8 = 33$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

$$x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \qquad lub \qquad x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby -1; $\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$

c)

$$x^3 + 6x^2 - 20x - 56 = 0$$

Pierwiastkami całkowitymi tego równania mogą być liczby

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm7;\ \pm8;\ \pm14;\ \pm28;\ \pm56$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 + 6 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 - 56 = 1 + 6 - 20 - 56 = -69$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 20 \cdot (-1) - 56 = -1 + 6 + 20 - 56 = -31$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 + 6 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 - 56 = 8 + 24 - 40 - 56 = -64$$

Niech

$$x = -2$$

Wówczas

$$(-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2) - 56 = -8 + 24 + 40 - 56 = 0$$

Jednym z pierwiastków jest $x = -2$

Możemy obniżyć stopień wielomianu

$$(x^3 + 6x^2 - 20x - 56):(x + 2) = x^2 + 4x - 28$$

$$\underline{-x^3 - 2x^2}$$

$$4x^2 - 20x - 56$$

$$\underline{-4x^2 - 8x}$$

$$-28x - 56$$

$$\underline{28x + 56}$$

$$= \qquad =$$

Rozwiążmy więc równanie kwadratowe

$$x^2 + 4x - 28 = 0$$

$$\Delta = 16 + 112 = 128$$

$$\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-4 - 8\sqrt{2}}{2} = -2 - 4\sqrt{2} \qquad lub \qquad x = \frac{-4 + 8\sqrt{2}}{2} = -2 + 8\sqrt{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $-2;\ -2 - 4\sqrt{2};\ -2 + 4\sqrt{2}$

d)

$$x^3 - 6x^2 - 24x + 64 = 0$$

Pierwiastkami całkowitymi tego równania mogą być liczby

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 8;\ \pm 16;\ \pm 32;\ \pm 64$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 64 = 1 - 6 - 24 + 64 = 35$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) + 64 = -1 - 6 + 24 + 64 = 81$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 64 = 8 - 24 - 48 + 64 = 0$$

Jednym z pierwiastków równania jest $x = 2$

Możemy obniżyć stopień wielomianu

$$(x^3 - 6x^2 - 24x + 64) : (x - 2) = x^2 - 4x - 32$$

$$\underline{-x^3 + 2x^2}$$

$$-4x^2 - 24x + 64$$

$$\underline{4x^2 - 8x}$$

$$-32x + 64$$

$$\underline{32x - 64}$$

$$= \quad =$$

Rozwiążmy więc równanie kwadratowe

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$\Delta = 16 + 128 = 144$$

$$\sqrt{\Delta} = 12$$

$$x = \frac{4 - 12}{2} = -4 \quad lub \quad x = \frac{4 + 12}{2} = 8$$

Rozwiązaniami równania są liczby $2; \ -4 \ i \ 8$

e)

$$x^3 + 24x - 16 = 0$$

Pierwiastkami całkowitymi tego równania mogą być liczby

$$\pm 1; \ \pm 2; \ \pm 4; \ \pm 8; \ \pm 16$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 + 24 \cdot 1 - 16 = 1 + 24 - 16 = 9$$

Niech

$$x = -1$$

$$(-1)^3 + 24 \cdot (-1) - 16 = -1 - 24 - 16 = -41$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 + 24 \cdot 2 - 16 = 8 + 48 - 16 = 40$$

Niech

$$x = -2$$

Wówczas

$$(-2)^3 + 24 \cdot (-2) - 16 = -8 - 48 - 16 = -72$$

Niech

$$x = 4$$

Wówczas

$$4^3 + 24 \cdot 4 - 16 = 64 + 96 - 16 = 144$$

Niech

$$x = -4$$

Wówczas

$$(-4)^3 + 24 \cdot (-4) - 16 = -64 - 96 - 16 = -176$$

Niech

$$x = 8$$

Wówczas

$$8^3 + 24 \cdot 8 - 16 = 512 + 192 - 16 = 688$$

Niech

$$x = -8$$

Wówczas

$$(-8)^3 + 24 \cdot (-8) - 16 = -512 - 192 - 16 = -720$$

Niech

$$x = 16$$

Wówczas

$$16^3+24\cdot16-16=4096+384-16=4464$$

Niech

$$x=-16$$

Wówczas

$$(-16)^3+24\cdot(-16)-16=-4096-384-16=-4496$$

Oznacza to, że równanie nie ma pierwiastków wymiernych. Zastosujmy więc pierwiastniki.

$$\Delta=4\cdot\left(\frac{q^2}{2^2}+\frac{p^3}{3^3}\right)=4\cdot\left(\frac{16^2}{2^2}+\frac{24^3}{3^3}\right)=4\cdot\left(\frac{(2\cdot8)^2}{2^2}+\frac{(3\cdot8)^3}{3^3}\right)=4\cdot\left(\frac{2^2\cdot8^2}{2^2}+\frac{3^3\cdot8^3}{3^3}\right)=$$

$$=4\cdot(8^2+8^3)=4\cdot8^2\cdot(1+8)=4\cdot64\cdot9$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4\cdot64\cdot9}=2\cdot8\cdot3=48$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{16-48}{2}}+\sqrt[3]{\frac{16+48}{2}}=\sqrt[3]{\frac{-32}{2}}+\sqrt[3]{\frac{64}{2}}=\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{32}$$

$$x=\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{-2^4}+\sqrt[3]{2^5}=2\sqrt[3]{2^2}-2\sqrt[3]{2}$$

Pozostałe dwa pierwiastki będą zespolone.

f)

$$x^3-6x^2+15x-18=0$$

Pierwiastkami całkowitymi mogą być liczby

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6;\ \pm9;\ \pm18$$

Niech

$$x=1$$

Wówczas

$$1^3-6\cdot1^2+15\cdot1-18=1-6\cdot1+15-18=1-6+15-18=-8$$

Niech

$$x=-1$$

Wówczas

$$(-1)^3-6\cdot(-1)^2+15\cdot(-1)-18=-1-6-15-18=-40$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 - 18 = 8 - 6 \cdot 4 + 30 - 18 = 8 - 24 + 30 - 18 = -4$$

Niech

$$x = -2$$

Wówczas

$$(-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 15 \cdot (-2) - 18 = -8 - 24 - 30 - 18 = -80$$

Niech

$$x = 3$$

Wówczas

$$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 18 = 27 - 6 \cdot 9 + 45 - 18 = 27 - 54 + 45 - 18 = 0$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest liczba 3

$$(x^3 - 6x^2 + 15x - 18) : (x - 3) = x^2 - 3x + 6$$

$$\underline{-x^3 + 3x^2}$$

$$-3x^2 + 15x - 18$$

$$\underline{3x^2 - 9x}$$

$$6x - 18$$

$$\underline{-6x + 18}$$

$$= \quad =$$

Rozwiążmy równanie kwadratowe

$$x^2 - 3x + 6 = 0$$

$$\Delta = 9 - 24 = -15$$

Równanie nie ma więcej pierwiastków rzeczywistych.

g)

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 58 = 0$$

Pierwiastkami wymiernymi tego równania mogą być liczby

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 29;\ \pm 58$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1 - 58 = 1 - 6 + 27 - 58 = -36$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 27 \cdot (-1) - 58 = -1 - 6 - 27 - 58 = -92$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 27 \cdot 2 - 58 = 8 - 6 \cdot 4 + 54 - 58 = 8 - 24 + 54 - 58 = -20$$

Niech

$$x = -2$$

Wówczas

$$(-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-2) - 58 = -8 - 24 - 54 - 58 = -144$$

Niech

$$x = 29$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 29^3 - 6 \cdot 29^2 + 27 \cdot 29 - 58 &= 24389 - 6 \cdot 841 + 783 - 58 \\ &= 24389 - 5046 + 783 - 58 = 20068 \end{aligned}$$

Niech

$$x = -29$$

Wówczas

$$(-29)^3 - 6 \cdot (-29)^2 + 27 \cdot (-29) - 58 = -24389 - 5046 - 783 - 58 = -30276$$

Niech

$$x = 58$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 58^3 - 6 \cdot 58^2 + 27 \cdot 58 - 58 &= 195\,112 - 6 \cdot 3\,364 + 1\,566 - 58 \\ &= 195\,112 - 20\,184 + 1\,566 - 58 = 176\,436 \end{aligned}$$

Nioech

$$x = -58$$

Wówczas

$(-58)^3 - 6 \cdot (-58)^2 + 27 \cdot (-58) - 58 = -195112 - 20184 - 1566 - 58 =$-216 920

Równanie nie ma pierwiastków wymiernych. Zastosujmy więc pierwiastniki.

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 58 = 0$$

Zastosujmy podstawienie

$$x = y + 2$$

Otrzymujemy

$$(y+2)^3 - 6 \cdot (y+2)^2 + 27 \cdot (y+2) - 58 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6 \cdot (y^2 + 4y + 4) +$$

$$+27y + 54 - 58 = y^3 + 6y^2 + 39y + 4 - 6y^2 - 24y - 24 = y^3 + 15y - 20$$

Mamy równanie kanoniczne

$$y^3 + 15y - 20 = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot \left(\frac{20^2}{2^2} + \frac{15^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{(2 \cdot 10)^2}{2^2} + \frac{(3 \cdot 5)^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 10^2}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 5^3}{3^3}\right) =$$

$$= 4 \cdot (10^2 + 5^3) = 4 \cdot (100 + 125) = 4 \cdot 225$$

$$\sqrt{\Delta} = 2 \cdot 15 = 30$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{20 - 30}{2}} + \sqrt[3]{\frac{20 + 30}{2}} = \sqrt[3]{-5} + \sqrt[3]{25}$$

$$x = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 2$$

$$x^3 - 9x - 12 = 0$$

Pierwiastkami wymiernymi mogą być liczby

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 12$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 9 \cdot 1 - 12 = 1 - 9 - 12 = -20$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 - 9 \cdot (-1) - 12 = -1 + 9 - 12 = -4$$

Niech

$$x = 2$$

Wówczas

$$2^3 - 9 \cdot 2 - 12 = 8 - 18 - 12 = -22$$

Niech

$$x = -2$$

Wówczas

$$(-2)^3 - 9 \cdot (-2) - 12 = -8 + 18 - 12 = -2$$

Niech

$$x = 3$$

Wówczas

$$3^3 - 9 \cdot 3 - 12 = 27 - 27 - 12 = -12$$

Niech

$$x = -3$$

Wówczas

$$(-3)^3 - 9 \cdot (-3) - 12 = -27 + 27 - 12 = -12$$

Niech

$$x = 4$$

Wówczas

$$4^3 - 9 \cdot 4 - 12 = 64 - 36 - 12 = 16$$

Niech

$$x = -4$$

Wówczas

$$(-4)^3 - 9 \cdot (-4) - 12 = -64 + 36 - 12 = -40$$

Niech

$$x = 6$$

Wówczas

$$6^3 - 9 \cdot 6 - 12 = 216 - 54 - 12 = 150$$

Niech

$$x = -6$$

Wówczas

$$(-6)^3 - 9 \cdot (-6) - 12 = -216 + 54 - 12 = -174$$

Niech

$$x = 12$$

Wówczas

$$12^3 - 9 \cdot 12 - 12 = 1728 - 108 - 12 = 1608$$

Niech

$$x = -12$$

Wówczas

$$(-12)^3 - 9 \cdot (-12) - 12 = -1728 + 108 - 12 = 1632$$

Równanie nie ma pierwiastków wymiernych. Rozwiążmy nasze równanie za pomocą pierwiastników.

h)

$$x^3 - 9x - 12 = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot \left(\frac{12^2}{2^2} - \frac{9^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{(2 \cdot 6)^2}{2^2} - \frac{(3 \cdot 3)^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 6^2}{2^2} - \frac{3^3 \cdot 3^3}{3^3}\right) = 4 \cdot (36 - 27) =$$

$$= 4 \cdot 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{12 - 6}{2}} + \sqrt[3]{\frac{12 + 6}{2}} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$$

Pozostałe pierwiastki są zespolone.

i)

$$x^3 - 6x^2 - 15x - 8 = 0$$

Wymiernymi pierwiastkami tego równania mogą być liczby:

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 8$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 - 8 = 1 - 6 - 15 - 8 = -28$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 8 = -1 - 6 + 15 - 8 = 0$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest liczba (-1)

Obniżmy stopień wielomianu

$$(x^3 - 6x^2 - 15x - 8) : (x + 1) = x^2 - 7x - 8$$

$$\underline{-x^3 - x^2}$$

$$-7x^2 - 15x - 8$$

$$\underline{7x^2 + 7x}$$

$$-8x - 8$$

$$\underline{8x + 8}$$

$$= \quad =$$

Rozwiążmy równanie

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$x = \frac{7 - 9}{2} = -1 \quad lub \quad x = \frac{7 + 9}{2} = 8$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $(-1) - pierwiastek\ podwójny\ i$ 8

$$x^3 - 3x^2 - 27x + 41 = 0$$

Pierwiastkami wymiernymi tego równania mogą być liczby

$$\pm 1 \quad lub \quad \pm 41$$

Niech

$$x = 1$$

Wówczas

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 27 \cdot 1 + 41 = 1 - 3 - 27 + 41 = 12$$

Niech

$$x = -1$$

Wówczas

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 27 \cdot (-1) + 41 = -1 - 3 + 27 + 41 = 64$$

Niech

$$x = 41$$

Wówczas

$$41^3 - 3 \cdot 41^2 - 27 \cdot 41 + 41 = 68\,921 - 3 \cdot 1\,681 - 1107 + 41$$
$$= 68921 - 5043 - 1107 + 41 = 62\,812$$

Niech

$$x = -41$$

Wówczas

$$(-41)^3 - 3 \cdot (-41)^2 - 27 \cdot (-41) + 41 = -68921 - 3 \cdot 1681 + 1107 + 41$$
$$= -68921 - 5043 + 1107 + 41 = -72\,816$$

Nasze równanie nie ma pierwiastków wymiernych. Przejdźmy do rozwiązania tego równania przez pierwiastniki.

j)

$$x^3 - 3x^2 - 27x + 41 = 0$$

Przyjmijmy podstawienie

$$x = y + 1$$

Otrzymujemy

$$(y+1)^3 - 3 \cdot (y+1)^2 - 27 \cdot (y+1) + 41 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3 \cdot (y^2 + 2y + 1) -$$
$$-27y - 27 + 41 = y^3 + 3y^2 - 24y + 15 - 3y^2 - 6y - 3 = y^3 - 30y + 12$$

Mamy równanie kanoniczne

$$y^3 - 30y + 12 = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot \left(\frac{12^2}{2^2} - \frac{30^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{(2 \cdot 6)^2}{2^2} - \frac{(3 \cdot 10)^3}{3^3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 6^2}{2^2} - \frac{3^3 \cdot 10^3}{3^3}\right) =$$

$$= 4 \cdot (36 - 1000) = -4 \cdot 964 = -16 \cdot 241$$

$$\sqrt{\Delta}= 4\sqrt{241}i$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{-12-4\sqrt{241}i}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-12+4\sqrt{241}i}{2}}=\sqrt[3]{-6-2\sqrt{241}i}+\sqrt[3]{-6+2\sqrt{241}i}$$

$$x=\sqrt[3]{-6-2\sqrt{241}i}+\sqrt[3]{-6+2\sqrt{241}i}+1$$

k)

$$x^3+6x^2+x-14=0$$

Wymiernymi pierwiastkami tego równania mogą być liczby

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm7;\ \pm14$$

Niech

$$x=1$$

Wówczas

$$1^3+6\cdot1^2+1-14=1+6+1-14=-6$$

Niech

$$x=-1$$

Wówczas

$$(-1)^3+6\cdot(-1)^2+(-1)-14=-1+6-1-14=-18$$

Niech

$$x=2$$

Wówczas

$$2^3+6\cdot2^2+2-14=8+24+2-14=-20$$

Niech

$$x=-2$$

Wówczas

$$(-2)^3+6\cdot(-2)^2+(-2)-14=-8+24-2-14=0$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest liczba (-2)

Obniżmy stopień równania

$$(x^3+6x^2+x-14):(x+2)=x^2+4x-7$$

$$-x^3 - 2x^2$$

$$4x^2 + x - 14$$

$$-4x^2 - 8x$$

$$-7x - 14$$

$$7x + 14$$

$$= \quad =$$

Rozwiążmy równanie

$$x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\Delta = 16 + 28 = 44$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{11}$$

$$x = \frac{-4 - 2\sqrt{11}}{2} = -2 - \sqrt{11} \quad lub \quad x = \frac{-4 + 2\sqrt{11}}{2} = -2 + \sqrt{11}$$

Pierwiastkami tego równania są liczby: -2; $-2 - \sqrt{11}$; $-2 + \sqrt{11}$