szkic rozwiązania – Witold Bednarek

Zastosuj twierdzenia

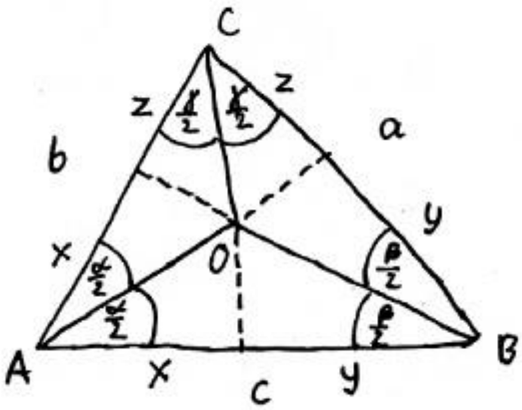
Zadanie 1.

Dany jest trójkąt o bokach a, b, c i kątach α, β, γ leżących pomiędzy odpowiednimi bokami. Niech *O* będzie punktem przecięcia dwusiecznych tego trójkąta. Wykaż, że:

$$AO = \frac{b+c-a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad BO = \frac{c+a-b}{2\cos\frac{\beta}{2}}, \quad CO = \frac{a+b-c}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Rozwiązanie

Mamy rysunek:



Mamy układ równań:

$$\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ z+x=b \end{cases}.$$

Stąd $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$.

Stąd

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{X}{OA},$$

a więc

$$OA = \frac{X}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c-a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Analogicznie uzyskujemy dwie pozostałe równości

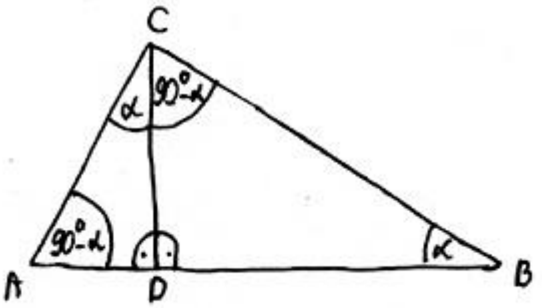
Zadanie 2.

Dany jest trójkąt prostokątny **ABC** ($\sphericalangle\gamma = 90^o$). Niech **CD** będzie wysokością tego trójkąta. Wykaż, że

$$AD \cdot BD = CD^2 .$$

Rozwiązanie

Mamy rysunek:



Z podobieństwa trójkątów **ADC i BDC** mamy równość:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

skąd

$$AD \cdot BD = CD^2 .$$

Zadanie 3.

Niech $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$, $\boldsymbol{m_c}$ będą środkowymi trójkąta o obwodzie $\boldsymbol{L}$ i polu $\boldsymbol{P}$. Wykaż, że:

$$m_a + m_b + m_c \geqslant \frac{18P}{L} .$$

Rozwiązanie

Niech $\boldsymbol{h_a}$, $\boldsymbol{h_b}$, $\boldsymbol{h_c}$ będą wysokościami trójkąta poprowadzonymi odpowiednio do boków $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, którym odpowiadają środkowe $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$, $\boldsymbol{m_c}$. Mamy nierówności:

$$m_a \geqslant h_a,\ m_b \geqslant h_b,\ m_c \geqslant h_c \text{ (dlaczego?).}$$

Stąd:

(1) $$m_a + m_b + m_c \geqslant h_a + h_b + h_c .$$

Skoro

$$P = \frac{ah_a}{2},\ P = \frac{bh_b}{2},\ P = \frac{ch_c}{2},$$

to

$$h_a = \frac{2P}{a},\ h_b = \frac{2P}{b},\ h_c = \frac{2P}{c} .$$

Nierówność (1) przyjmuje postać

(2) $$m_a + m_b + m_c \geqslant 2P\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) .$$

Mamy nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ dla x, y > 0, co Czytelnik zechce udowodnić.
Z powyższej nierówności wynika, że

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant 9$$ (dlaczego?).

Stąd i z nierówności (2) wynika, że

$$m_a+m_b+m_c\geqslant 2P\cdot\frac{9}{a+b+c}=\frac{18P}{L}.$$