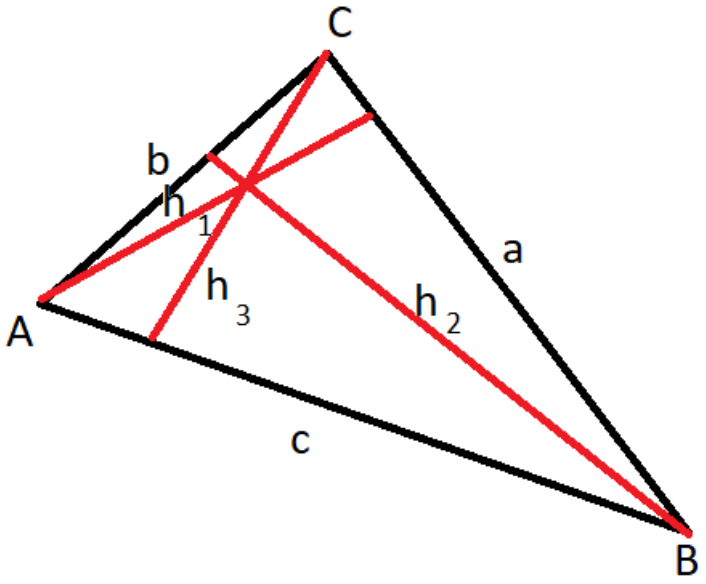
szkic rozwiązania – Jacek Kredenc

Trójkątne zadanie

Zadanie 1.

Oblicz pole trójkąta, którego wysokości mają odpowiednio długości: 4; 5 i 6.

Rozwiązanie



Niech wysokość h_1 ma długość 4 i pada na podstawę a

Niech wysokość h_2 ma długość 5 i pada na podstawę b

Niech wysokość h_3 ma długość 6 i pada na podstawę c

Niech P pole trójkąta ABC.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta

$P = \frac{1}{2}ah,$

możemy wyznaczyć długość podstawy trójkąta

$a = \frac{2P}{h}.$

Korzystając z tego wzoru możemy wyznaczyć długości wszystkich boków trójkąta ABC.

$$a = \frac{2P}{h_1} = \frac{2P}{4} = \frac{P}{2}$$

$$b = \frac{2P}{5}$$

$$c = \frac{2P}{6} = \frac{P}{3}$$

Zastosujemy teraz wzór Herona na obliczanie pola trójkąta.

$$P = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Gdzie

$$p - połowa\ obwodu\ trójkąta$$

$$a; b; c - długości\ boków\ trójkąta$$

Wyznaczmy więc p

$$p = \frac{\frac{P}{2} + \frac{2P}{5} + \frac{P}{3}}{2} = \frac{\frac{15P}{30} + \frac{12P}{30} + \frac{10P}{30}}{2} = \frac{\frac{37P}{30}}{2} = \frac{37P}{60}$$

Wyznaczone p podstawmy do wzoru Herona. Przedtem jednak policzmy $(p-a)$; $(p-b)$; $(p-c)$

$$p - a = \frac{37P}{60} - \frac{P}{2} = \frac{7P}{60}$$

$$p - b = \frac{37P}{60} - \frac{2P}{5} = \frac{13P}{60}$$

$$p - c = \frac{37P}{60} - \frac{P}{3} = \frac{17P}{60}$$

Przechodzimy do wzoru Herona

$$P = \sqrt{\frac{37P}{60} \cdot \frac{7P}{60} \cdot \frac{13P}{60} \cdot \frac{17P}{60}} = \left(\frac{P}{60}\right)^2 \sqrt{57239}$$

$$\left(\frac{P}{60}\right)^2 \sqrt{57239} - P = 0$$

$$P \cdot \left(\frac{P}{60^2}\sqrt{57239} - 1\right) = 0$$

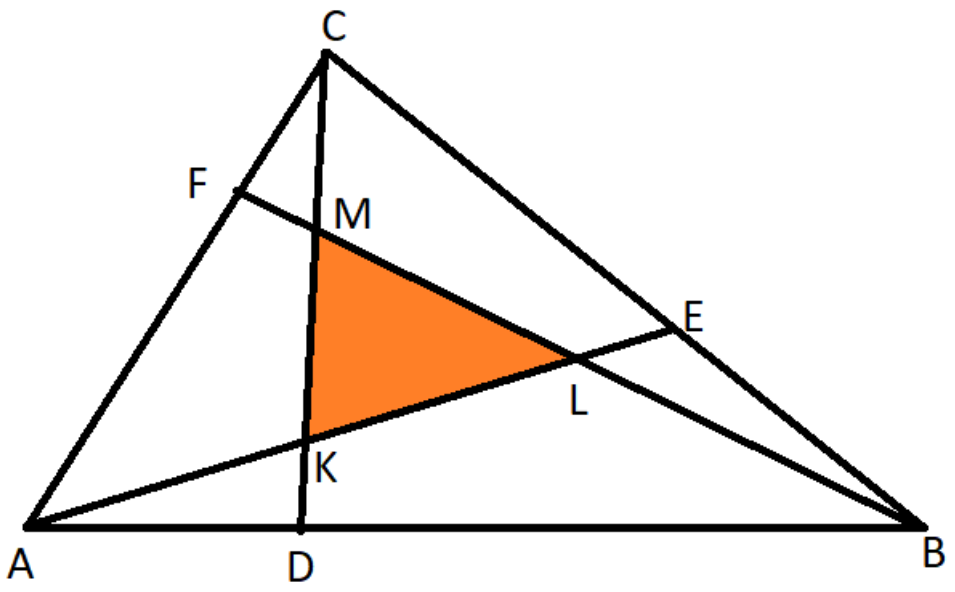
$$P = 0 \qquad lub \qquad P = \frac{60^2 \cdot \sqrt{57239}}{57239} \approx 15{,}05$$

Odpowiedź

Pole tego trójkąta wynosi około 15,05

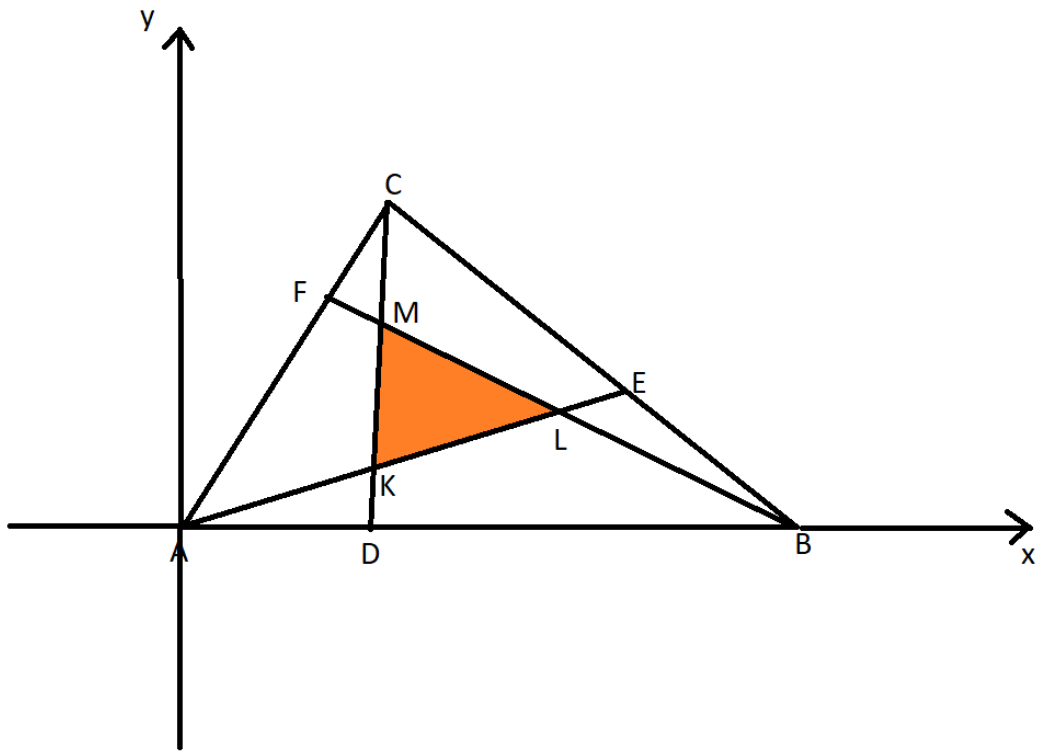
Zadanie 2.

Wiadomo, że $|AB| = 3 \cdot |AD|, |BC| = 3 \cdot |BE|\ i\ |AC| = 3 \cdot |CF|$. Wyznacz $\frac{|P_{ABC}|}{|P_{KLM}|} = ?$



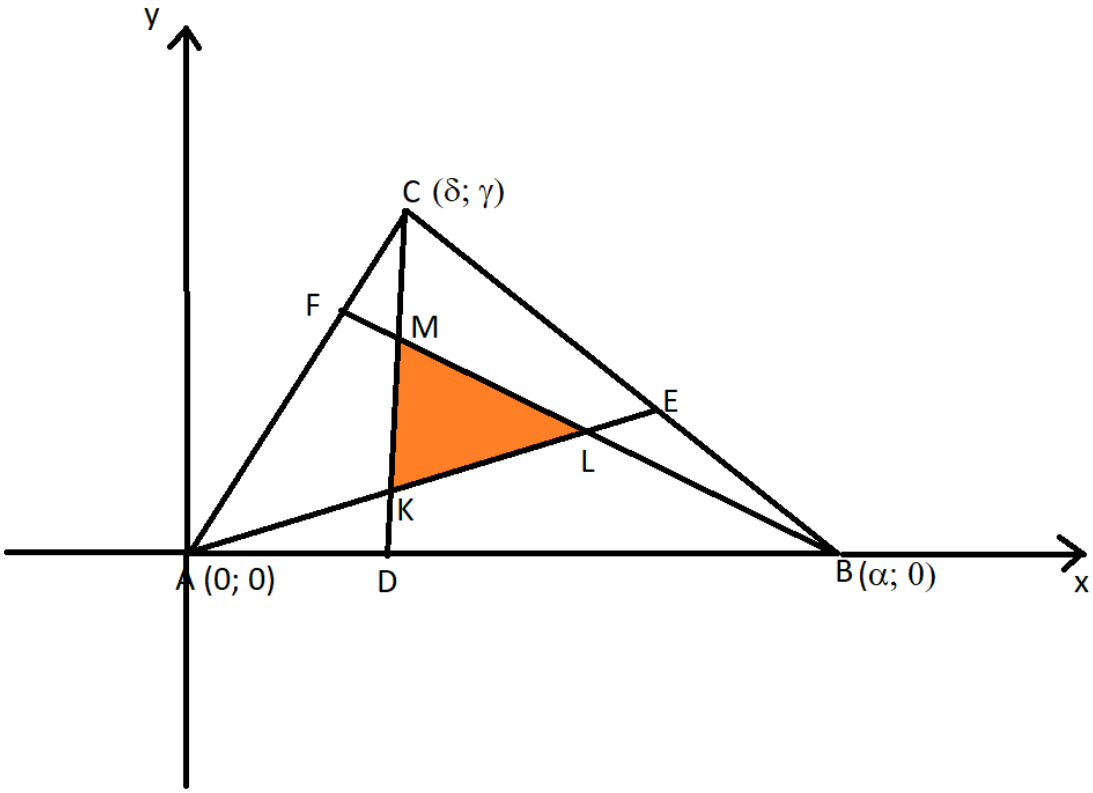
Rozwiązanie

Dla prostszych rachunków przyjmijmy, że trójkąt ABC umieszczony został w układzie współrzędnych w taki sposób, że wierzchołek A leży w początku układu współrzędnych, a bok AB trójkąta ABC leży na osi OX. Możemy tak zrobić ponieważ przekształcenia izometryczne takie jak przesunięcia i obroty nie mają wpływu na pole figury.



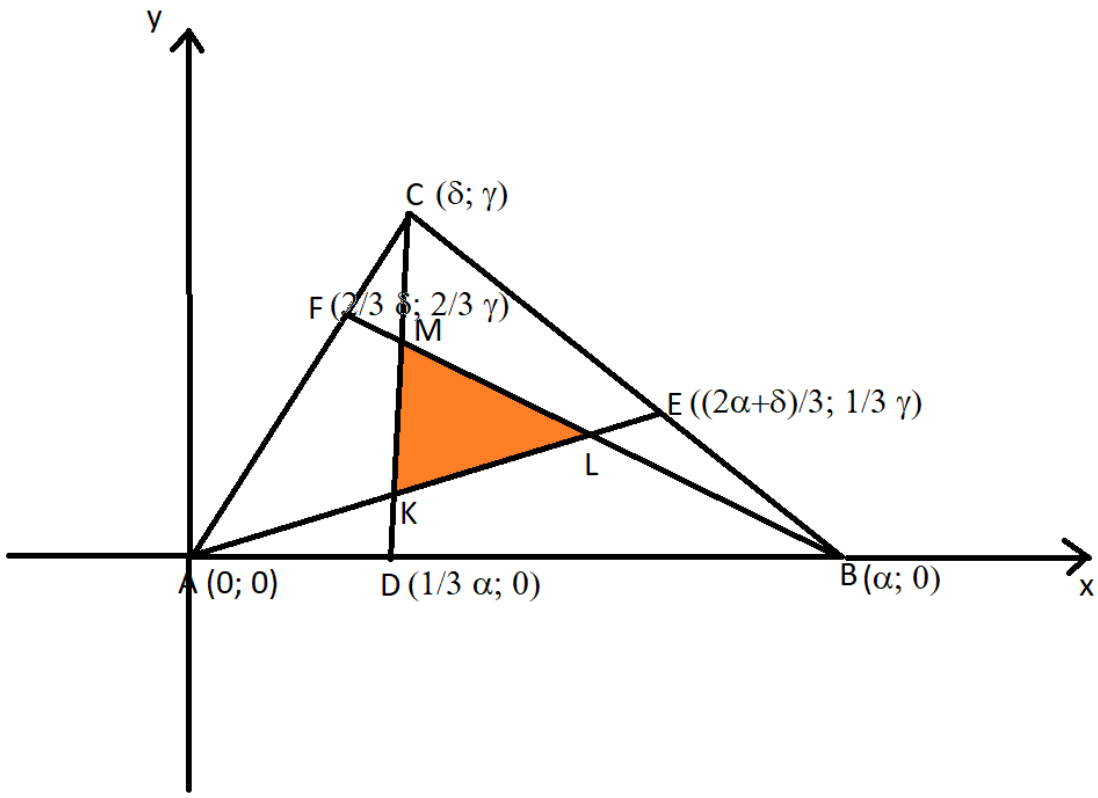
Przy takim położeniu trójkąta, jego wierzchołki mają współrzędne:

$$A = (0; 0); \qquad B = (\alpha; 0); \qquad C = (\delta;\ \gamma)$$



Przy tak ustalonych współrzędnych wierzchołków ABC punkty D; E i F mają współrzędne

$$D = \left(\frac{1}{3}\alpha; 0\right); \qquad E = \left(\alpha - \frac{\alpha - \delta}{3}; \frac{1}{3}\gamma\right) = \left(\frac{2\alpha + \delta}{3}; \frac{1}{3}\gamma\right); \qquad F = \left(\frac{2}{3}\delta; \frac{2}{3}\gamma\right)$$



Pozostały jeszcze do ustalenia współrzędne punktów K; L i M. Zauważmy, że punkt K leży na przecięciu odcinków AE i CD; punkt L na przecięciu BF i AE i wreszcie punkt M na przecięciu odcinków CD i AE.

Zacznijmy od znalezienia równań prostych, na których leżą odcinki AE; BF i CD.

Ogólna postać równania prostej, to

$$y = ax + b$$

Niech l będzie prostą zawierającą odcinek AE. Ponieważ prosta l przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $b = 0$ i równanie ma postać

$$y = ax$$

$$a = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{3}\gamma}{\frac{2\alpha + \delta}{3}} = \frac{\gamma}{2\alpha + \delta}$$

Prosta l ma więc równanie

$$l: y = \frac{\gamma}{2\alpha + \delta}x; \qquad dla \qquad 2\alpha \neq -\delta$$

Niech k będzie prostą zawierającą odcinek BF

$$k: y = ax + b$$

Wyznaczmy teraz współczynniki a i b prostej $y = ax + b$. W tym celu musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 0 = a\alpha + b \\ \frac{2}{3}\gamma = \frac{2}{3}a\delta + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -a\alpha \\ 2\gamma = 2a\delta + 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -a\alpha \\ 2\gamma = 2a\delta - 3a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -a\alpha \\ 2\gamma = a(2\delta - 3\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -a\alpha \\ a = \frac{2\gamma}{2\delta - 3\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{2\gamma}{2\delta - 3\alpha}\alpha \\ a = \frac{2\gamma}{2\delta - 3\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{-2\alpha\gamma}{2\delta - 3\alpha} \\ a = \frac{2\gamma}{2\delta - 3\alpha} \end{cases}$$

Ostatecznie równanie prostej k ma postać

$$k: y = \frac{2\gamma}{2\delta - 3\alpha}x - \frac{2\alpha\gamma}{2\delta - 3\alpha}; \qquad dla \qquad \alpha \neq \frac{2}{3}\delta$$

Niech m będzie prostą zawierającą odcinek CD.

$$m: y = ax + b$$

Wyznaczmy teraz współczynniki a i b prostej $y = ax + b$. W tym celu musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \gamma = a\delta + b \\ 0 = \frac{1}{3}a\alpha + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = a\delta + b \\ b = -\frac{1}{3}a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = a\delta - \frac{1}{3}a\alpha \\ b = -\frac{1}{3}a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = a\left(\delta - \frac{1}{3}\alpha\right) \\ b = -\frac{1}{3}a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\gamma}{\delta - \frac{1}{3}\alpha} \\ b = -\frac{1}{3}a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\gamma}{\frac{3\delta - \alpha}{3}} \\ b = -\frac{1}{3}a\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{3\gamma}{3\delta - \alpha} \\ b = -\frac{1}{3} \cdot \dfrac{3\gamma}{3\delta - \alpha}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{3\gamma}{3\delta - \alpha} \\ b = \dfrac{-\alpha\gamma}{3\delta - \alpha} \end{cases}$$

$$m: y = \frac{3\gamma}{3\delta - \alpha}x - \frac{\alpha\gamma}{3\delta - \alpha}; \qquad dla \qquad 3\delta \neq \alpha$$

Z rysunku widać, że punkt K leży na przecięciu prostej l i prostej m. Współrzędne punktu K znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma}{2\alpha + \delta}x \\ y = \dfrac{3\gamma}{3\delta - \alpha}x - \dfrac{\alpha\gamma}{3\delta - \alpha} \end{cases} \qquad przy\ założeniu, że\ 3\delta \neq \alpha\ i\ 2\alpha \neq -\delta$$

$$\frac{\gamma}{2\alpha + \delta}x = \frac{3\gamma}{3\delta - \alpha}x - \frac{\alpha\gamma}{3\delta - \alpha}$$

$$3\delta\gamma x - \alpha\gamma x = 6\alpha\gamma x + 3\delta\gamma x - 2\alpha^2\gamma - \alpha\delta\gamma$$

$$-7\alpha\gamma x = -\alpha\gamma(2\alpha + \delta)$$

$$x = \frac{2\alpha + \delta}{7}$$

$$y = \frac{\gamma}{2\alpha + \delta} \cdot \frac{2\alpha + \delta}{7} = \frac{1}{7}\gamma$$

$$K = \left(\frac{2\alpha + \delta}{7}; \frac{1}{7}\gamma\right)$$

Punkt L leży na przecięciu prostej l i prostej k. Współrzędne punktu L znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma}{2\alpha+\delta}x \\ y = \dfrac{2\gamma}{2\delta-3\alpha}x - \dfrac{2\alpha\gamma}{2\delta-3\alpha} \end{cases} \qquad przy\ założeniu, że \qquad 2\alpha \neq -\delta\ i\ \alpha \neq \frac{2}{3}\delta$$

$$\frac{\gamma}{2\alpha+\delta}x = \frac{2\gamma}{2\delta-3\alpha}x - \frac{2\alpha\gamma}{2\delta-3\alpha}$$

$$2\delta\gamma x - 3\alpha\gamma x = 4\alpha\gamma x + 2\delta\gamma x - 4\alpha^2\gamma - 2\alpha\delta\gamma$$

$$-7\alpha\gamma x = -2\alpha\gamma(2\alpha+\delta)$$

$$x = \frac{2(2\alpha+\delta)}{7}$$

$$y = \frac{\gamma}{2\alpha+\delta}\cdot\frac{2(2\alpha+\delta)}{7} = \frac{2}{7}\gamma$$

$$L = \left(\frac{2(2\alpha+\delta)}{7}; \frac{2}{7}\gamma\right)$$

Punkt M leży na przecięciu prostej m i prostej k. Współrzędne punktu M znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\gamma}{2\delta-3\alpha}x - \dfrac{2\alpha\gamma}{2\delta-3\alpha} \\ y = \dfrac{3\gamma}{3\delta-\alpha}x - \dfrac{\alpha\gamma}{3\delta-\alpha} \end{cases} \qquad przy\ założeniu, że \qquad 3\delta \neq \alpha\ i\ \ \alpha \neq \frac{2}{3}\delta$$

$$\frac{2\gamma}{2\delta-3\alpha}x - \frac{2\alpha\gamma}{2\delta-3\alpha} = \frac{3\gamma}{3\delta-\alpha}x - \frac{\alpha\gamma}{3\delta-\alpha}$$

$$6\delta\gamma x - 2\alpha\gamma x - 6\alpha\delta\gamma + 2\alpha^2\gamma = 6\delta\gamma x - 9\alpha\gamma x - 2\alpha\delta\gamma + 3\alpha^2\gamma$$

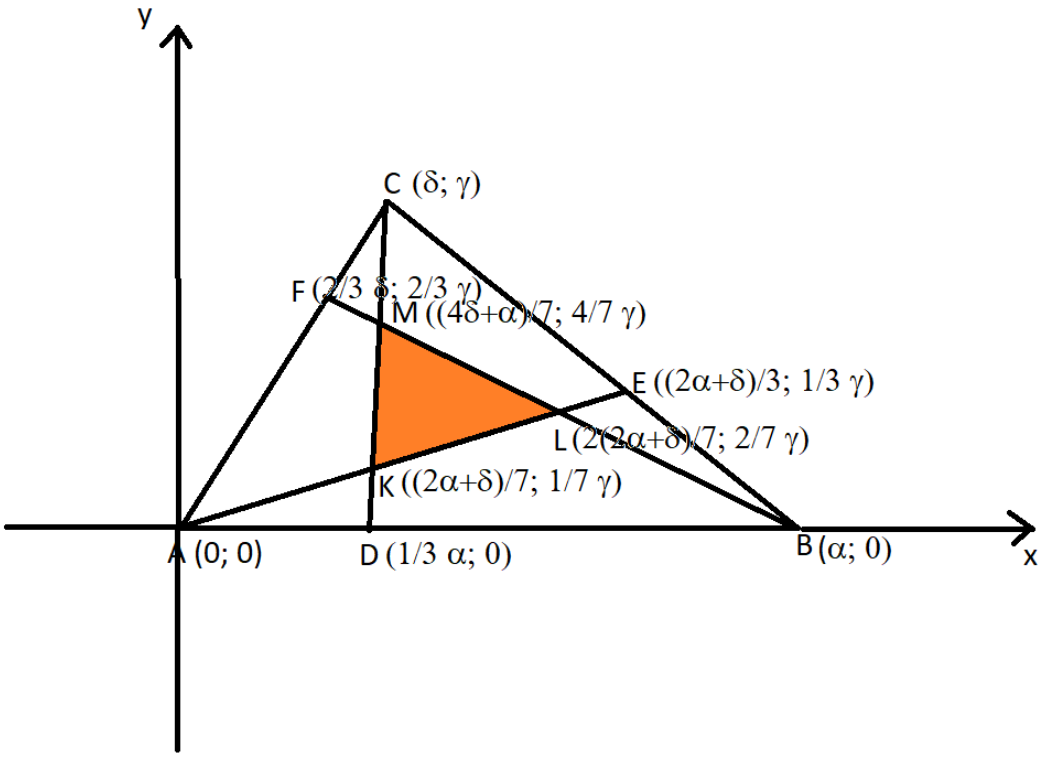
$$7\alpha\gamma x = 4\alpha\delta\gamma + \alpha^2\gamma$$

$$7\alpha\gamma x = \alpha\gamma(4\delta+\alpha)$$

$$x = \frac{4\delta+\alpha}{7}$$

$$y = \frac{3\gamma}{3\delta-\alpha}\cdot\frac{4\delta+\alpha}{7} - \frac{\alpha\gamma}{3\delta-\alpha} = \frac{12\delta\gamma+3\alpha\gamma-7\alpha\gamma}{7(3\delta-\alpha)} = \frac{12\delta\gamma-4\alpha\gamma}{7(3\delta-\alpha)} = \frac{4\gamma(3\delta-\alpha)}{7(3\delta-\alpha)} = \frac{4}{7}\gamma$$

$$M = \left(\frac{4\delta+\alpha}{7}; \frac{4}{7}\gamma\right)$$



Obliczmy pole trójkąta ABC

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \delta & \gamma \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\alpha\gamma|$$

Obliczmy pole trójkąta KLM

$$P_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & \frac{2\alpha+\delta}{7} & \frac{\gamma}{7} \\ 1 & \frac{2(2\alpha+\delta)}{7} & \frac{2\gamma}{7} \\ 1 & \frac{4\delta+\alpha}{7} & \frac{4\gamma}{7} \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{8\gamma(2\alpha+\delta)}{49} + \frac{2\gamma(2\alpha+\delta)}{49} + \frac{\gamma(4\delta+\alpha)}{49} - \frac{2\gamma(2\alpha+\delta)}{49} - \frac{2\gamma(4\delta+\alpha)}{49} - \frac{4\gamma(2\alpha+\delta)}{49}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{4\gamma(2\alpha+\delta)}{49} - \frac{\gamma(4\delta+\alpha)}{49}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{8\alpha\gamma + 4\delta\gamma - 4\delta\gamma - \alpha\gamma}{49}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{7\alpha\gamma}{49}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\alpha\gamma}{7}\right| = \frac{1}{14}|\alpha\gamma|$$

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{14}|\alpha\gamma|}{\frac{1}{2}|\alpha\gamma|} = \frac{1}{7}$$

Odpowiedź:

Pole trójkąta KLM stanowi $\frac{1}{7}$ pola trójkąta ABC.