EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI - poziom rozszerzony

publikowany w 62. numerze *Świata Matematyki* (www.swiatmatematyki.pl)

(zadania zamknięte)

Zadanie	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	C	B	A	B

(zadania otwarte)

Zadanie 6.

Mamy $W(x)=P(x)(x^2+x-2)+ax+b$, gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem, natomiast $ax+b$ jest poszukiwaną resztą. Mamy $W(1)=0$ i $W(-2)=3$ (dlaczego?). Zatem:

$$\begin{cases} P(1)(1^2+1-2)+a\cdot 1+b=0 \\ P(-2)((-2)^2-2-2)+a\cdot(-2)+b=3, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=3. \end{cases}$$

Stąd $a=-1$ i $b=1$.

Odp. Poszukiwana reszta wynosi $(-x+1)$.

Zadanie 7.

Jeśli $m^2-1=0$, czyli $m=1$ lub $m=-1$, to mamy odpowiednio wielomiany $W(x)=1$ oraz $W(x)=-4x+1$. Pierwszy z tych wielomianów jest stały i przyjmuje wartość dodatnią, a drugi nie spełnia warunku zadania (dlaczego?).

Załóżmy dalej, że $m^2-1\neq 0$, czyli $m\neq 1$ i $m\neq -1$. Wielomian $W(x)$ jest wtedy trójmianem kwadratowym. Jego wykres musi być taki, jak to przedstawiają poniższe rysunki:

Zatem $m^2-1>0$ i $\Delta<0$ lub $\Delta=0$.

Wobec tego mamy układ nierówności:

$$\begin{cases} m^2>1 \\ 4(m-1)^2-4(m^2-1)\leqslant 0\ , \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} m\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty) \\ m\in(1;\infty), \end{cases}$$

stąd $m\in(1,\infty)$.

Odp. $m\in\{1\}\cup(1,\infty)=\langle 1,\infty)$.

Zadanie 8.

Wiadomo, że jeśli $a,b>0$ i $a\neq 1$ oraz $k\neq 0$, to $\log_{a^k}b=\frac{1}{k}\log_a b$. Założenie w zadaniu: $x>0$. Mamy kolejno:

$$\log_2 x+\log_{2^2}x+\log_{2^3}x=11,$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11,$$
$$\log_2 x = 6,$$
$$x = 2^6,$$
$$x = 64.$$

Odp. Mamy z założenia $x > 0$, a więc $x = 64$.

Zadanie 9.

Zauważmy, że $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$. Zatem podana nierówność przyjmuje postać:

$$(2-\sqrt{3})^x + \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 4.$$

Podstawmy $t = (2-\sqrt{3})^x$ $(t > 0)$. Wtedy:

$$t + \frac{1}{t} \leqslant 4, \quad \Big/ \cdot t$$
$$t^2 + 1 \leqslant 4t, \quad \Big/ -4t$$
$$t^2 - 4t + 1 \leqslant 0.$$

Mamy tu miejsca zerowe funkcji kwadratowej $t_1 = 2-\sqrt{3}$, $t_2 = 2+\sqrt{3}$. Korzystając z wykresu funkcji kwadratowej, otrzymujemy:

$$2-\sqrt{3} \leqslant t \leqslant 2+\sqrt{3},$$

czyli

$$(2-\sqrt{3})^1 \leqslant (2-\sqrt{3})^x t \leqslant 2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1}.$$

Skoro $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, to korzystając z faktu, że funkcja wykładnicza o podstawie mniejszej od jeden jest malejąca, otrzymujemy nierówności:

$$1 \geqslant x \geqslant -1.$$

Odp. $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Zadanie 10.

Mamy równania okręgów:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad (x+m)^2 + y^2 = m^2.$$

Powyższe równania przedstawiają okręgi odpowiednio o środkach $S_1(-1,-2)$; $S_2(-m,0)$ i promieniach $r_1 = 1$; $r_2 = |m|$ (musi być $m \neq 0$ – dlaczego?).

Warunek styczności zewnętrznej ma postać $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, czyli:

$$\sqrt{(-m+1)^2 + 2^2} = 1 + |m|,$$
$$\sqrt{m^2 - 2m + 5} = 1 + |m|.$$

Skoro prawa strona powyższego równania jest dodatnia (dlaczego?), to:

$$m^2 - 2m + 5 = (1+|m|)^2,$$
$$m^2 - 2m + 5 = 1 + 2|m| + |m|^2,$$
$$m^2 - 2m + 5 = 1 + 2|m| + m^2,$$
$$2m - 2|m| = -4, \text{ gdzie } m \neq 0.$$

1° $m > 0$. Wtedy:

$$-2m - 2m = -4,$$
$$m = 1$$

i spełnione jest założenie.

2° $m < 0$. Wtedy:

$$-2m - 2(-m) = -4,$$
$$0 = -4, \text{ co jest sprzeczne.}$$

Odp. $m = 1$.

Zadanie 11.

Zgodnie ze wzorami Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego mamy równości:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \\ x_1x_2x_3 = 1. \end{cases}$$

Z pierwszej równości mamy:

$$(x_1+x_2+x_3)^2=0,$$

czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = 0.$$

Korzystając z drugiej nierówności, otrzymujemy:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6 = 0,$$

skąd

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2 = 36,$$

czyli

(*) $$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 = 36.$$

Podnosimy do kwadratu drugą równość, z wypisanych wzorów Viète'a:

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2=(-3)^2,$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 = 9,$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = 9.$$

Korzystając z wypisanych wzorów Viète'a, mamy:

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 9.$$

Stąd i z równości (*) otrzymujemy

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 36 - 2\left(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2\right) = 36 - 2 \cdot 9 = 18.$$

Odp. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18$.

Zadanie 12.

Niech $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ będą kątami trójkąta, zaś $a \leqslant b \leqslant c$ będą jego bokami. Zgodnie z warunkami zadania mamy równości:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \text{ i } b^2 = ac \text{ (dlaczego?).}$$

Z pierwszej równości wynika, że:

$$\beta = \frac{180^\circ - \beta}{2}, \text{ skąd } \beta = 60^\circ.$$

Zapisujemy twierdzenie kosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta,$$

czyli:

$$ac = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60^\circ,$$

$$ac = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{1}{2},$$

$$ac = a^2 + c^2 - ac,$$

$$a^2 + c^2 - 2ac = 0,$$

$$(a-c)^2 = 0,$$

$$a = c.$$

Zatem $a = c$ i w konsekwencji $b^2 = ac = c \cdot c = c^2$, skąd $b = c$.

Wobec tego $a = b = c$, co oznacza, że rozważany trójkąt jest równoboczny.

Zadanie 13.

Mamy kolejno:

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{\frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m}{\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{a_1 + a_m}{a_1 + a_n} = \frac{m}{n},$$

$$na_1 + na_m = ma_1 + ma_n,$$

$$na_1 + n(a_1 + (m-1)r) = ma_1 + m(a_1 + (n-1)r),$$

$$na_1 + na_1 + (mn-n)r = ma_1 + ma_1 + (mn-m)r,$$

$$2na_1 + mnr - nr = 2ma_1 + mnr - mr,$$

$$2na_1 - nr = 2ma_1 - mr,$$

$$n(2a_1 - r) = m(2a_1 - r),$$

(*) $$(n-m)(2a_1 - r) = 0.$$

Jeśli $m = n$, to podana równość do udowodnienia jest oczywista.

Jeśli $m \neq n$, to po podzieleniu obu stron równości (*) przez $n - m \neq 0$, otrzymujemy:

$$2a_1 - r = 0,$$

a więc:

$$r = 2a_1.$$

W konsekwencji:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)r}{a_1 + (n-1)r} = \frac{a_1 + (m-1) \cdot 2a_1}{a_1 + (n-1) \cdot 2a_1} = \frac{1 + (m-1) \cdot 2}{1 + (n-1) \cdot 2} = \frac{2m-1}{2n-1},$$

co należało wykazać.

Zadanie 14.

Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, która jest kwadratem oraz przez h wysokość tego prostopadłościanu. Mamy równania:

$$\begin{cases} V = x^2 h \\ P = 2x^2 + 4xh \text{ (dlaczego?).} \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $h = \frac{P - 2x^2}{4x}$. Skoro $h > 0$, to $2x^2 < P$, czyli $x < \sqrt{\frac{P}{2}}$.

Z pierwszego równania mamy:

(*) $$V = V(x) = x^2 \cdot \left(\frac{P - 2x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}Px - \frac{1}{2}x^3 \text{ dla } x \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{2}}\right).$$

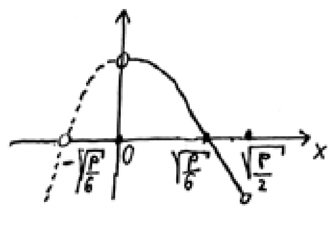
Obliczamy:

$$V'(x) = \frac{1}{4}P - \frac{3}{2}x^2 \text{ dla } x \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{2}}\right).$$

Łatwo wyznaczyć miejsca zerowe pochodnej:

$$x = -\sqrt{\frac{P}{6}} \text{ oraz } x = \sqrt{\frac{P}{6}}.$$

Oto wykres pochodnej:



Mamy:

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{6}}\right),$$

$$V'\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right) = 0,$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\sqrt{\frac{P}{6}}; \sqrt{\frac{P}{2}}\right).$$

Zatem funkcja $x \longmapsto V'(x)$ ma maksimum w punkcie $x = \sqrt{\frac{P}{6}}$.

Ze wzoru (*) wyznaczamy:

$$V_{\max} = V\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right) = \frac{1}{4}P\sqrt{\frac{P}{6}} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{P}{6}}\right)^3 = \frac{P\sqrt{6P}}{36}.$$

Zadanie 15.

Niech $P(A_i)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia A_i, polegającego na wylosowaniu kuli białej z i-tego pudełka dla $i = 1, 2, 3$.

Mamy:

$$P(A_1) = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}; \qquad P(A_2) = \frac{n}{n+6}; \qquad P(A_3) = \frac{n}{n+12}.$$

Niech $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w tym schemacie losowań.

Mamy wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot P(A_1) + \frac{1}{3} \cdot P(A_2) + \frac{1}{2} \cdot P(A_3),$$

czyli:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n+12} = \frac{1}{18} + \frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)}.$$

Zgodnie z warunkiem zadania $P(A) > \frac{5}{18}$, a więc:

(*)
$$\frac{1}{18} + \frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)} > \frac{5}{18},$$

$$\frac{n}{3(n+6)} + \frac{n}{6(n+12)} > \frac{4}{18}, \qquad \Big/ \cdot 18(n+6)(n+12)$$

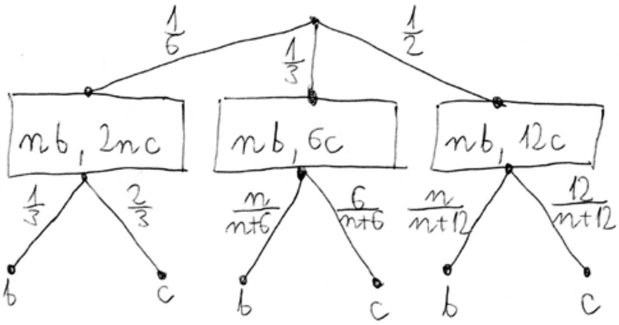
$$6n(n+12) + 3n(n+6) > 4(n+6)(n+12),$$

$$5n^2 + 18n - 288 > 0.$$

Rozwiązaniem powyższej nierówności jest $n \in \left(-\infty; -9\frac{1}{3}\right) \cup (6; \infty)$.

Odp. Skoro n jest liczbą naturalną, to $n \in \{7, 8, 9, \ldots\}$.

W rozwiązaniu zadania, do wyprowadzenia zależniści (*) możemy także skorzystać z grafów. Prezentujemy jego najprostrzą wersję, zwaną „drzewem” (red.):



$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+12} > \frac{5}{18}$$