Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Zadanie Lucas'a

Żyjący w XIX w. francuski matematyk Edouaed Lucas, będący pod wrażeniem ciągu Fibonacciego stworzył swój ciąg, który rekurencyjnie można zdefiniować następująco:

$$L_1 = 1; \quad L_2 = 3; \quad L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$$

Znajdź wszystkie wyrazy ciągu Fibonacciego, które są równe wyrazom ciagu Lucasa.

Rozwiązanie:

Można łatwo zauważyć, że zachodzi następująca zależność między kolejnymi wyrazami ciągu Lucasa i ciągu Fibonacciego

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Gdy założymy, ze $n > 3$ otrzymujemy następujące nierówności:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \geq F_{n+1} + F_2 > F_{n+1}$$

Słaba nierówność w tym wyrażeniu wynika z faktu, że ciąg Fibonacciego jest ciągiem rosnącym.

Z drugiej strony

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

Z powyższego wynika, że

$$F_{n+1} < L_n < F_{n+2}$$

Z ostatniej nierówności wynika, że wyrazów takich samych dla obu ciągów można szukać tylko wśród pierwszych wyrazów ciągu Fibonacciego i rzeczywiście wyrazami wspólnymi dla obu ciągów są liczby 1 i 3.