Tajemnice wielomianów

Zadanie 1. Niech $U(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Czy sumę kolejnych kwadratów liczb naturalnych można obliczyć, wykorzystując do tego funkcję wielomianową, Jeżeli tak, to wyznacz $U(100)$.

Rozwiązanie:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
U(n)	**1**	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**
		4	**9**	**16**	**25**	**36**
			5	**7**	**9**	**11**
				2	**2**	**2**

$$\boldsymbol{U(n) = an^3 + bn^2 + cn + d}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 19a+5b+c=9 \\ 37a+7b+c=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 18a+2b=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 6a=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + b + c + d = 1 \\ \frac{7}{3} + 3b + c = 4 \\ 4 + 2b = 5 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c + d = \frac{2}{3} \\ 3b + c = \frac{5}{3} \\ 2b = 1 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c + d = \frac{2}{3} \\ 3b + c = \frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + c + d = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} + c = \frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + d = \frac{1}{6} \\ c = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + d = \frac{1}{6} \\ c = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$U(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$U(100) = \frac{1}{3} \cdot 100^3 + \frac{1}{2} \cdot 100^2 + \frac{1}{6} \cdot 100 = \frac{1}{3} \cdot 1000000 + \frac{1}{2} \cdot 10000 + 16\frac{2}{3} =$$

$$= 333333\frac{1}{3} + 5000 + 16\frac{2}{3} = 338350$$

Zadanie 2. Niech $U(n) = \sum_{k=1}^{n} k^4$. Czy sumę kolejnych kwadratów liczb naturalnych można obliczyć, wykorzystując do tego funkcję wielomianową. Jeżeli tak, to wyznacz $U(100)$.

Rozwiązanie

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
U(n)	**1**	**17**	**98**	**354**	**979**	**2275**
		16	**81**	**256**	**625**	**1296**
			65	**175**	**369**	**671**
				110	**194**	**302**
					84	**108**
						24

7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
4676	**8772**	**15333**	**25333**	**39974**	**60710**	**89271**
2401	**4096**	**6561**	**10000**	**14641**	**20736**	**28561**
1105	**1695**	**2465**	**3439**	**4641**	**6095**	**7825**
434	**590**	**770**	**974**	**1202**	**1454**	**1730**
132	**156**	**180**	**204**	**228**	**252**	**276**
24	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**

$$U(n) = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 32a+16b+8c+4d+2e+f=17 \\ 243a+81b+27c+9d+3e+f=98 \\ 1024a+256b+64c+16d+4e+f=354 \\ 3125a+625b+125c+25d+5e+f=979 \\ 7776a+1296b+216c+36d+6e+f=2275 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 211a+65b+19c+5d+e=81 \\ 781a+175b+37c+7d+e=256 \\ 2101a+369b+61c+9d+e=625 \\ 4651a+671b+91c+11d+e=1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 570a+110b+18c+2d=175 \\ 1320a+194b+24c+2d=369 \\ 2550a+302b+30c+2d=671 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 390a+60b+6c=110 \\ 750a+84b+6c=194 \\ 1230a+108b+6c=302 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 390a+60b+6c=110 \\ 360a+24b=84 \\ 480a+24b=108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 195a+30b+3c=55 \\ 30a+2b=7 \\ 40a+2b=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 195a+30b+3c=55 \\ 30a+2b=7 \\ 10a=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=1 \\ 31a+15b+7c+3d+e=16 \\ 180a+50b+12c+2d=65 \\ 195a+30b+3c=55 \\ 30a+2b=7 \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}+b+c+d+e+f=1 \\ 6\frac{1}{5}+15b+7c+3d+e=16 \\ 36+50b+12c+2d=65 \\ 39+30b+3c=55 \\ 6+2b=7 \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c+d+e+f=\frac{4}{5} \\ 15b+7c+3d+e=9\frac{4}{5} \\ 50b+12c+2d=29 \\ 30b+3c=16 \\ 6b=1 \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b+c+d+e+f=\frac{4}{5}} \\ \boldsymbol{15b+7c+3d+e=9\frac{4}{5}} \\ \boldsymbol{50b+12c+2d=29} \\ \boldsymbol{30b+3c=16} \\ \boldsymbol{b=\frac{1}{6}} \\ \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{6}+c+d+e+f=\frac{4}{5}} \\ \boldsymbol{2\frac{1}{2}+7c+3d+e=9\frac{4}{5}} \\ \boldsymbol{8\frac{1}{3}+12c+2d=29} \\ \boldsymbol{5+3c=16} \\ \boldsymbol{b=\frac{1}{6}} \\ \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c+d+e+f=\frac{19}{30}} \\ \boldsymbol{7c+3d+e=7\frac{3}{10}} \\ \boldsymbol{12c+2d=20\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{3c=11} \\ \boldsymbol{b=\frac{1}{6}} \\ \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c+d+e+f=\frac{19}{30}} \\ \boldsymbol{7c+3d+e=7\frac{3}{10}} \\ \boldsymbol{12c+2d=20\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{c=3\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{b=\frac{1}{6}} \\ \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\frac{2}{3} + d + e + f = \frac{19}{30} \\ 25\frac{2}{3} + 3d + e = 7\frac{3}{10} \\ 44 + 2d = 20\frac{2}{3} \\ c = 3\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + e + f = -3\frac{1}{30} \\ 3d + e = -18\frac{11}{30} \\ 2d = -23\frac{1}{3} \\ c = 3\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + e + f = -3\frac{1}{30} \\ 3d + e = -18\frac{11}{30} \\ d = -11\frac{2}{3} \\ c = 3\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -11\frac{2}{3} + e + f = -3\frac{1}{30} \\ -35 + e = -18\frac{11}{30} \\ d = -11\frac{2}{3} \\ c = 3\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e+f=8\frac{19}{30} \\ e=16\frac{19}{30} \\ d=-11\frac{2}{3} \\ c=3\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16\frac{19}{30}+f=8\frac{19}{30} \\ e=16\frac{19}{30} \\ d=-11\frac{2}{3} \\ c=3\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f=-8 \\ e=16\frac{19}{30} \\ d=-11\frac{2}{3} \\ c=3\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$U(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{6}n^4+3\frac{2}{3}n^3-11\frac{2}{3}n^2+16\frac{19}{30}n-8$$

$$U(100)=\frac{1}{5}\cdot 100^5+\frac{1}{6}\cdot 100^4+\frac{11}{3}\cdot 100^3-\frac{35}{3}\cdot 100^2+\frac{499}{30}\cdot 100-8=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 10000000000+\frac{1}{6}\cdot 100000000+\frac{11}{3}\cdot 1000000-\frac{35}{3}\cdot 10000+\frac{499}{30}\cdot 100-8$$

$$=\frac{10000000000}{5}+\frac{100000000}{6}+\frac{11000000}{3}-\frac{350000}{3}+\frac{49900}{30}-8=$$

$$=2000000000+16666666\frac{2}{3}+3666666\frac{2}{3}-116666\frac{2}{3}+16633\frac{1}{3}-8=$$

$$=2170233292$$

Zadanie 3. Na płaszczyźnie znajduje się n punktów, takich, że żadne trzy z nich nie są współliniowe – żadna prosta nie przejdzie jednocześnie przez 3 punkty. Niech L(n) będzie liczbą wszystkich prostych o tej własności, że każda prosta przechodzi dokładnie przez dwa punkty. Znajdź wiel

omian, który pozwala wyznaczyć L(n). Wylicz L(30).

Rozwiązanie

n	**L(n)**
2	**1**
3	**3**
4	**6**
5	**10**
6	**15**
7	**21**
8	**28**

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
L(n)	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
			1	**1**	**1**	**1**	**1**	

L(n)= an^2+bn+c

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=3 \\ 16a+4b+c=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ 5a+b=2 \\ 7a+b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ 5a+b=2 \\ 2a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ 5a+b=2 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+2b+c=1 \\ 2\frac{1}{2}+b=2 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b+c=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1+c=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$L(n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$L(30)=\frac{1}{2}\cdot 30^2-\frac{1}{2}\cdot 30=\frac{1}{2}\cdot 900-15=450-15=435$$