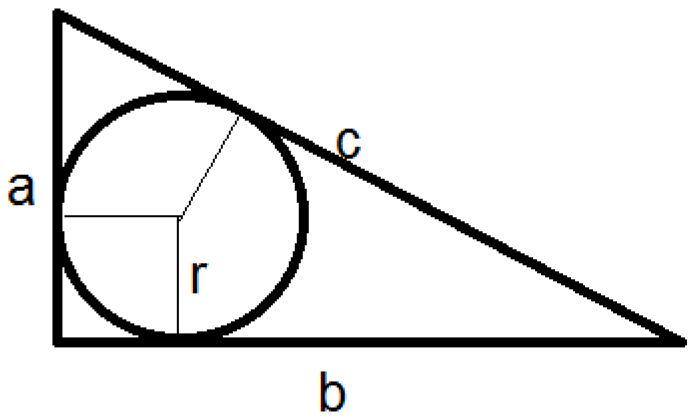
Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Trójkąt egipski

Wykaż, że jeśli promień okręgu wpisanego w trójkąt pitagorejski wynosi 1, to jest to trójkąt egipski.

Rozwiązanie



Niech $a = s + r \quad i \quad b = t + r$. Wówczas $c = s + t$

Ponieważ mowa jest o trójkącie pitagorejskim, więc wszystkie liczby *a*; *b*; *c*; *s* i *t* są całkowite. Na mocy twierdzenia Pitagoras zachodzi następująca równość:

$$(s + r)^2 + (t + r)^2 = (s + t)^2.$$

Przekształćmy to równanie

$$s^2 + 2sr + r^2 + t^2 + 2tr + r^2 = s^2 + 2st + t^2,$$

$$2sr + 2r^2 + 2tr = 2st,$$

$$sr + r^2 + tr = st.$$

Ponieważ r=1, zatem mamy

$$s + 1 + t = st,$$

$$s + 1 = st - t,$$

$$s + 1 = t(s - 1),$$

$$t = \frac{s+1}{s-1}.$$

Zauważmy, że liczba w liczniku ułamka po prawej stronie, od liczby w mianowniku tego ułamka rożni się o 2. Niech więc $k = s - 1$ Wówczas

$$\frac{s+1}{s-1} = \frac{k+2}{k}.$$

Ponieważ oba ułamki muszą być równe liczbie całkowitej, więc musi istnieć takie *n*, że

$$k + 2 = nk$$

$$(n-1)k = 2$$

Wynika z tego, że

$$n - 1 = 1 \quad i \quad k = 2 \qquad lub \qquad n - 1 = 2 \quad i \quad k = 1.$$

Wynika z tego, że $s = 3 \quad lub \quad s = 2$.

Gdy $s = 3$

$$t = \frac{s+1}{s-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Gdy $s = 2$

$$t = \frac{3}{1} = 3$$

W pierwszym przypadku

$$a = 4; \quad b = 3 \quad i \quad c = 5.$$

W drugim przypadku

$$a = 3; \quad b = 4 \quad i \quad c = 5,$$

co za każdym razem daje trójkąt egipski.