szkic rozwiązania: Jacek Kredenc

Rozwiązania zadań maturalnych

(Zadania maturalne zamieszczone w czasopiśmie Świat Matematyki nr 73)

1.

$$(x-3)^2(x+y) \leq 0$$

Ponieważ $(x-3)^2$ jest zawsze większe lub równe 0, więc

$$x+y \leq 0$$

A to zachodzi gdy

$$x \leq -y$$

2.

Zgodnie z treścią zadania mamy

$$f(x) = 3^{x+m} \qquad i \qquad g(x) = 3^{2x-3}$$

$$f(4) = 3^{4+m} \qquad i \qquad g(4) = 3^5$$

Zgodnie z warunkiem zadania mamy

$$f(4) = g(4)$$

$$3^{4+m} = 3^5$$

Równanie zachodzi, gdy

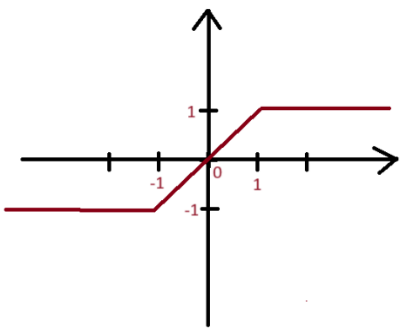
$$4+m=5$$

Więc

$$m=1$$

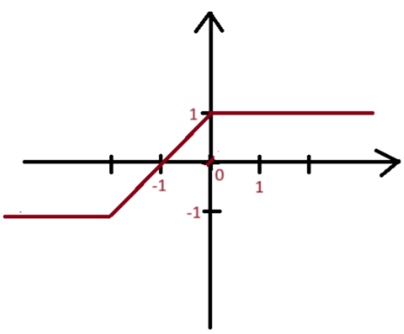
3.

f(x)



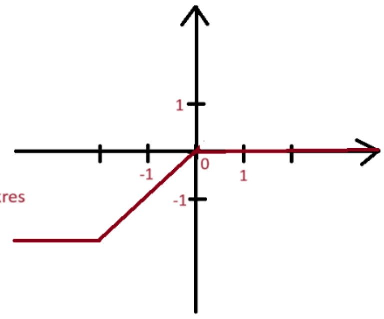
f(x+1)

przesuwa wykres w lewo



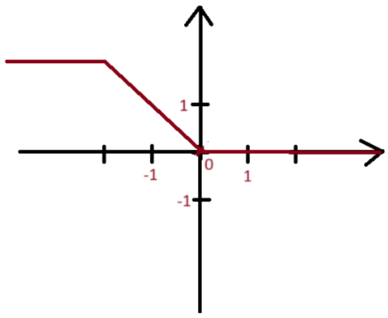
f(x+1) - 1

przesuwa wykres w dół



g(x)=|f(x+1) - 1|

Odbija ujemną część wykresu



4.

Funkcja

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2+10}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$$

Jest w punkcie $x = 0$ nie ciągła, gdyż dla argumentu $x = 0$ funkcja f(x) zmierza do $\frac{1}{2}$

5.

$$W(x) = (x^2 - 4)(x - m)$$

Dwoma pierwiastkami tego wielomianu są $x = -2 \quad i \quad x = 2$. Trzecim pierwiastkiem tego wielomianu będzie $x = m$. Możliwe są trzy przypadki

I. $m < -2$. Wówczas $m = -6$ i otrzymujemy ciąg {-6; -2; 2}
II. $-2 < m < 2$. Wówczas $m = 0$ i otrzymujemy ciąg {-2; 0; 2}
III. $m > 2$. Wówczas $m = 6$ i otrzymujemy ciąg {-2; 2; 6}

6.

Jeżeli ciąg a_n jest arytmetyczny, to zachodzą warunki

$$a_{n+1} = a_n + r \quad i \quad a_{n+2} = a_n + 2r$$

Trzy kolejne wyrazy ciągu b_n to $\{2^{a_n};\ 2^{a_n+r};\ 2^{a_n+2r}\}$

Sprawdźmy, czy iloraz kolejnych wyrazów tego ciągu jest stały

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_n+r}}{2^{a_n}} = \frac{2^{a_n} \cdot 2^r}{2^{a_n}} = 2^r$$

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{2^{a_n+2r}}{2^{a_n+r}} = \frac{2^{a_n} \cdot (2^r)^2}{2^{a_n} \cdot 2^r} = 2^r$$

Czyli otrzymany ciąg jest geometryczny.

7.

Zauważmy, że podana suma jest nieskończonym szeregiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{100}$.

Zatem

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{11}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}$$

8.

$$A = (2;\ -1); \qquad B = (1+a;\ -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = [1+a-2;\ -1] = [-1+a;\ -1]$$

$$\vec{u} = [2+a; 1]$$

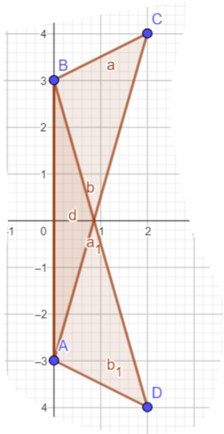
$$1-a = 2+a$$

$$-1 = 2a$$

$$a = -0{,}5$$

9.

$$A = (0;\ -3); \qquad B = (0; 3); \qquad C = (2; 4); \qquad D = (2;\ -4)$$



Jak łatwo zauważyć, oba trójkąty mają jeden wspólny bok, a dwa pozostałe są parami równej długości, więc oba trójkąty są przystające.

10.

$$Z(t) = 0{,}8M(t) + 0{,}3D(t) + 0{,}1F(t) + 0{,}2B(t)$$

Gdzie

$$M(t) = 1{,}92 + 0{,}01t - 0{,}002t^2$$

$$D(t) = 3{,}42 - 0{,}02t + 0{,}003t^2$$

$$F(t) = 0{,}51 - 0{,}02t - 0{,}012t^2$$

$$B(t) = 5{,}84 - 0{,}01t - 0{,}001t^2$$

Zatem

$$Z(t) = 0{,}8 \cdot (1{,}92 + 0{,}01t - 0{,}002t^2) + 0{,}3 \cdot (3{,}42 - 0{,}02t + 0{,}003t^2) + 0{,}1 \cdot (0{,}51 - 0{,}02t - 0{,}012t^2) + 0{,}2 \cdot (5{,}84 - 0{,}01t - 0{,}001t^2) =$$

$$= 1{,}536 + 0{,}008t - 0{,}0016t^2 + 1{,}026 - 0{,}006t + 0{,}0009t^2 + 0{,}051 - 0{,}002t - 0{,}0012t^2 + 1{,}168 - 0{,}002t - 0{,}0002t^2 =$$

$$= -0{,}0021t^2 - 0{,}002t + 3{,}781$$

$Z(t)$ okazało się funkcją kwadratową skierowaną ramionami w dół. Największą wartość otrzymuje dla

$$t = -\frac{0{,}002}{0{,}0042} = -20:42 \approx -0{,}476$$

Ponieważ $t \geq 0\ i\ t\ całkowite$, więc indeks giełdowy będzie największy w początkowym dniu i wyniesie 3, 781. Najmniejszą wartość indeks giełdowy wyniesie w ostatnim dniu czyli 14 dnia i wyniesie on

$$Z(14) = -0{,}0021 \cdot 14^2 - 0{,}002 \cdot 14 + 3{,}781 = -0{,}4116 - 0{,}028 + 3{,}781 = 3{,}3414$$

11.

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 3 + 2(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \geq 1000$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 3 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (3 + n - 1) \cdot n = (2 + n) \cdot n$$

Należy rozwiązać nierówność

$$(n+2) \cdot n \geq 1000$$

$$n^2 + 2n - 1000 \geq 0$$

Rozwiążmy równanie

$$n^2 + 2n - 1000 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4000 = 4004$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4004} = 2\sqrt{1001}$$

$$n = \frac{-2 - 2\sqrt{1001}}{2} = -1 - \sqrt{1001} < 0 \quad lub \quad n = \frac{-2 + 2\sqrt{1001}}{2} = \sqrt{1001} - 1$$

Parabola ma ramiona skierowane do góry, więc

$$n \leq -1 - \sqrt{1001} \quad lub \quad n \geq \sqrt{1001} - 1$$

Ponieważ $n > 0$, więc pozostaje druga nierówność

$$n \geq \sqrt{1001} - 1$$

Zatem

$$n = 32$$

Bo n jest naturalne.

12.

a)

$$|OA'| = |OA| + 2$$

$$|OA| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Podobnie można obliczyć, że

$$|OB| = 13$$

Zatem

$$|OA'| = |OB'| = 15$$

Punkty A $\quad i \quad$ A' leżą na półprostej o równaniu

$$y = ax$$

Wyznaczmy *a* wiedząc, że $A = (12; 5)$

Mamy

$$5 = 12a$$

$$a = \frac{5}{12}$$

Niech

$$A' = (x'; y')$$

Wówczas

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 15^2 \\ \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{5}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 225 \\ y' = \dfrac{5}{12} \cdot x' \end{cases}$$

$$(x')^2 + \left(\frac{5}{12} \cdot x'\right)^2 = 225$$

$$(x')^2 + \frac{25}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$\frac{169}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$(x')^2 = \frac{225 \cdot 144}{169}$$

$$x' = \frac{15 \cdot 12}{13} = \frac{180}{13} \quad lub \quad x' = -\frac{180}{13}$$

Ponieważ punkty A i A' leża na tej samej półprostej o początku O, więc pozostaje tylko $x' = \frac{180}{13}$

$$y' = \frac{5}{12} \cdot \frac{180}{13} = \frac{75}{13}$$

$$A' = \left(\frac{180}{13}; \frac{75}{13}\right)$$

Punkty B i B' leżą na półprostej o równaniu

$$y = ax$$

Wyznaczmy *a* wiedząc, że $B = (-12; 5)$

Mamy

$$5 = -12a$$

$$a = -\frac{5}{12}$$

Niech

$$B' = (x'; y')$$

Wówczas

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 15^2 \\ \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 225 \\ y' = -\dfrac{5}{12} \cdot x' \end{cases}$$

$$(x')^2 + \left(-\frac{5}{12} \cdot x'\right)^2 = 225$$

$$(x')^2 + \frac{25}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$\frac{169}{144} \cdot (x')^2 = 225$$

$$(x')^2 = \frac{225 \cdot 144}{169}$$

$$x' = \frac{15 \cdot 12}{13} = -\frac{180}{13} \qquad lub \qquad x' = \frac{180}{13}$$

Ponieważ punkty B i B' leżą na tej samej półprostej o początku O, więc pozostaje tylko $x' = -\frac{180}{13}$

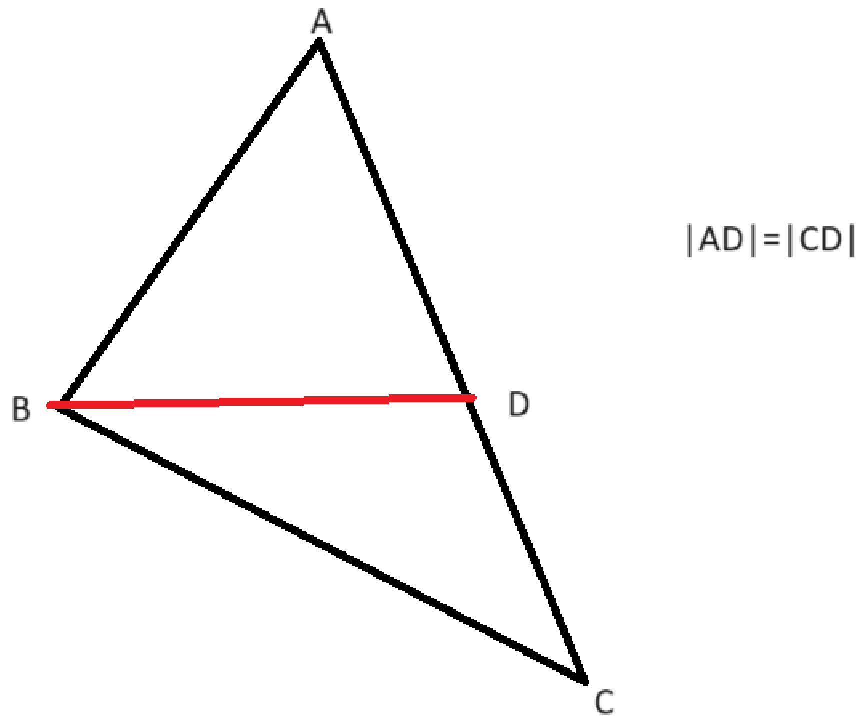
$$y' = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{180}{13}\right) = \frac{75}{13}$$

$$B' = \left(-\frac{180}{13}; \frac{75}{13}\right)$$

b)

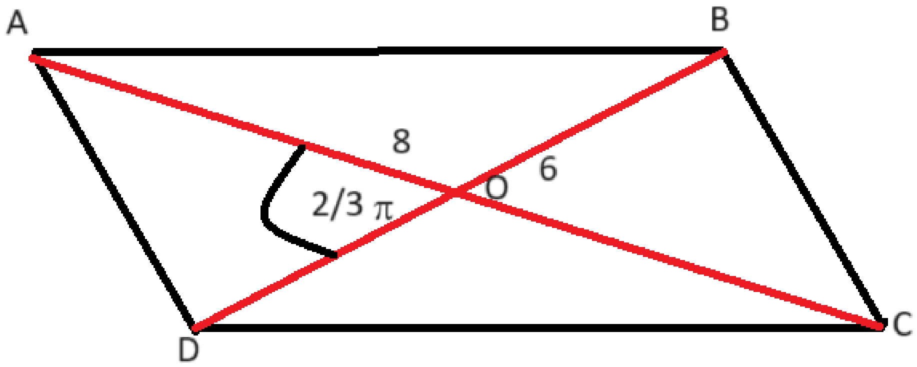
To przekształcenie nie jest izometrią ponieważ nie zachowuje odległości punktu i jego obrazu od początku układu współrzędnych.

13.



Przyjmijmy, że AC jest podstawą trójkąta ABC. Wówczas podstawą trójkąta ABD jest AD, a podstawą trójkąta BDC jest CD. Oba trójkąty mają tę samą wysokość, czyli mają te same pola.

14.



$$|\boldsymbol{AD}|^2 = |\boldsymbol{OA}|^2 + |\boldsymbol{DO}|^2 - 2 \cdot |\boldsymbol{OA}| \cdot |\boldsymbol{OD}| \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \pi\right)$$

$$|\boldsymbol{AD}|^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\boldsymbol{AD}|^2 = 25 - 12 = 13$$

$$|\boldsymbol{AD}| = \sqrt{13}$$

15.

Niech

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Wówczas

$$2x_1 + 3 \leq 2x_2 + 3$$

$$2x_1 \leq 2x_2$$

$$x_1 \leq x_2$$

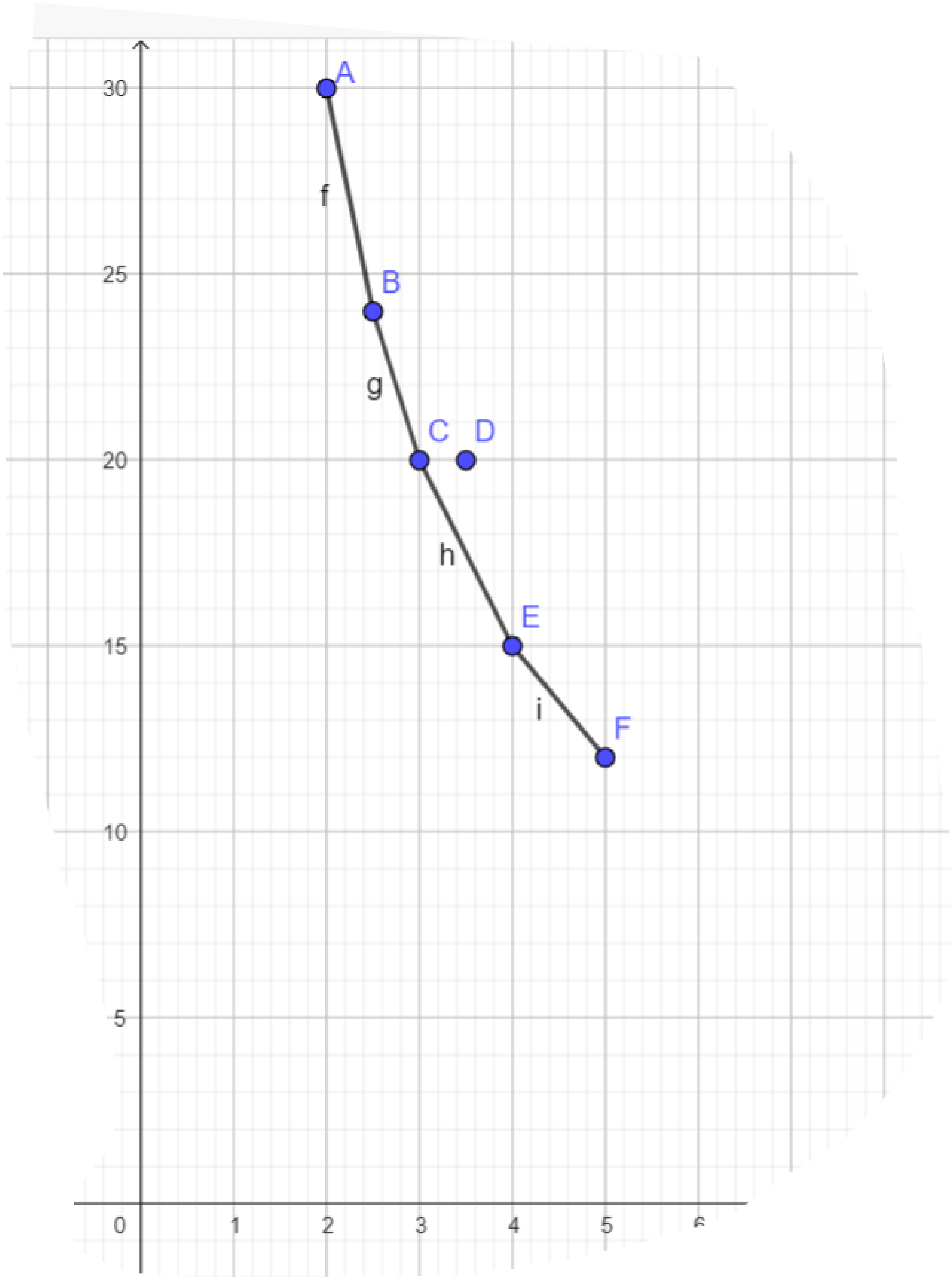
Co należało wykazać

16.

Funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 1$ której wykres jest parabolą o ramionach skierowanych ku górze. Najniższym punktem tej paraboli jest jej wierzchołek $W = (3; -8)$. Przedział $\langle 0;\ 2\rangle$Leży na lewo od wierzchołka, czyli najniższa wartość tej funkcji, to wartość w prawym końcu przedziału czyli $f(2)$

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = 4 - 12 + 1 = -7$$

17.



Na wykresie wyraźnie widać, że odstaje punkt $D = (3{,}5; 20)$ i ten odczyt jest właśnie błędny.

Szukana zależność, to

$$p = \frac{60}{V}$$