Rozwiązanie zadań z numeru 42

Liczenie na szachownicy

Zadanie 1.

Przy pomocy szachownicy wyznacz wartości dla:

a) $\sqrt{255}$

b) $\sqrt{9865881}$

Rozwiązanie:

a) 15,9687…

b) 3141

Zadanie 2.

Oblicz, jakie cyfry ukrywają się pod poszczególnymi literami pamiętając, że różnym literom odpowiadają różne cyfry, a ta sama litera oznacza tę samą cyfrę dla:

$\sqrt{ABCDEFGHI} = BBDDG$

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba podpierwiastkowa składa się z nieparzystej ilości cyfr, więc musi zachodzić następująca nierówność:

$B^2 \leq A < 10$

Oznacza to, że

$B \in \{1; 2; 3\}$

Niech więc B=1

Wówczas

$A \in \{2; 3\}$

Ponieważ druga od lewej cyfra pierwiastka, to też B, więc zachodzić musi warunek:

$11^2 \leq 100A + 10 + C < 12^2$

$121 \leq 100A + 10 + C < 144$

Ale $A > 1$ czyli liczba $100A + 10 + C > 200$, nie może być więc mniejsza od 144. Oznacza to, że $B \neq 1$

Załóżmy teraz, że B=3. Wówczas A=9

Musi zachodzić następująca nierówność:

$33^2 \leq 930 + C < 34^2$

$1089 \leq 930 + C < 1156$

Ponieważ liczba 930+C jest na pewno mniejsze od 1000 więc $B \neq 3$

Jeżeli nasze zadanie ma rozwiązanie, to B=2, a $A \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$ i zachodzi nierówność

$22^2 \leq 100A + 20 + C < 23^2$

$484 \leq 100A + 20 + C < 529$

Ta podwójna nierówność będzie spełniona jedynie dla A=5

$520 + C - 484 = 36 + C$

Zgodnie z algorytmem obliczania pierwiastka zachodzi kolejna nierówność:

$(440 + D) \cdot D \leq 3600 + 100C + 10D + E < (440 + D + 1) \cdot (D + 1)$

Zajmijmy się nierównością:

$3600 + 100C + 10D + E < (440 + D + 1) \cdot (D + 1)$

Dla D=9 mamy:

$3600 + 100C + 10 \cdot 9 + E < 4500$

Nierówność jest prawdziwa.

Niech teraz D=8, otrzymamy:

$3600 + 100C + 10 \cdot 8 + E < 4041$

Nierówność jest też prawdziwa.

Niech teraz D=7

$3600 + 100C + 10 \cdot 7 + E < 3584$

Nierówność nieprawdziwa, czyli D=8 lub D=9

Sprawdźmy teraz nierówność:

$$(440 + D) \cdot D \leq 3600 + 100C + 10D + E$$

Niech D=8, wówczas

$$3584 \leq 3680 + 100C + E$$

Nierówność prawdziwa

Wówczas reszta równa się

$$3680 + 100C + E - 3584 = 96 + 100C + E$$

Niech D=9, wówczas

$$4041 \leq 3690 + 100C + E$$

Ta nierówność będzie prawdziwa pod warunkiem, że $C \geq 4$

Wyznaczmy resztę

$$3690 + 100C + E - 4041 = 100C + E - 351$$

Tak, więc należy osobno sprawdzić dwa przypadki

Przypadek I D=8

Przypadek II D=9

I. Niech D=8.

Zachodzić musi następująca podwójna nierówność

$$4568 \cdot 8 \leq 9600 + 10000C + 100E + 10F + G < 4569 \cdot 9$$

$$36544 \leq 9600 + 10000C + 100E + 10F + G < 41121$$

Ta podwójna nierówność będzie spełniona tylko wówczas, gdy C=3. Możemy więc zapisać

$$36544 \leq 39600 + 100E + 10F + G < 41121$$

Tak, więc, przy założeniu, że D=8 mamy:

$$A = 5; B = 2; C = 3; D = 8$$

Pozostało ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod E; F; G; H; I, wiedząc, że mogą to być cyfry:

0; 1; 4; 6; 7; 9.

G nie może być 0, bo wówczas także Hi I były by zerami, a tak być nie może

G nie może być 1, bo wówczas I też było by 1

Jeśli G=4, to I=6

G nie może być 6 bo wówczas I też było by 6

Jeśli G=7, to I= 9

Jeśli G=9, to I=1

Mamy więc 3 możliwości. Sprawdźmy je:

$22884^2 = 523677456$

Źle, bo występują w potędze dwie 7

$22887^2 = 523814769$

Mamy więc jedno rozwiązanie

$22889^2 = 523906321$

Źle, bo w potędze występują dwie 2.

II. Niech D=9

Zachodzić musi następująca podwójna nierówność:

$4589 \cdot 9 \leq 10000C + 100E - 35100 + 10F + G < 4590 \cdot 10$

$41301 \leq 10000C + 100E - 35100 + 10F + G < 45900$

$76401 \leq 10000C + 100E + 10F + G < 81000$

Ta nierówność będzie spełniona, gdy C=8.

Tak, więc, przy założeniu, że D=9 mamy:

$A = 5; B = 2; C = 8; D = 9$

Pozostało ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod E; F; G; H; I, wiedząc, że mogą to być cyfry:

0; 1; 3; 4; 6; 7.

G nie może być 0, bo wówczas także H i I były by zerami, a tak być nie może

G nie może być 1, bo wówczas I też było by 1

G nie może być 3, bo wówczas I było by równe 9, ale 9 to przecież D

Jeśli G=4, to I=6

G nie może być 6 bo wówczas I też było by 6

G nie może być 7 bo wówczas I było by równe 9, ale 9 to przecież D

Pozostał więc tylko przypadek G=4

Sprawdźmy go:

$22994^2 = 528724036$

Potęga po prawej stronie nie spełnia warunku, że D=9

Odpowiedź:

Zadanie ma jedno rozwiązanie, w którym pod zapisem

$\sqrt{ABCDEFGHI} = BBDDG$

Ukrywa się równość

$\sqrt{523814769} = 22887$

Planowanie podróży

Zadanie

W artykule „Problem kupca na pustyni" pisaliśmy, jak dysponując chlebakiem i bukłakiem mogącym pomieścić zapas żywności i wody pitnej na 4 dni, przebyć drogę, która wymaga sześciodniowej wędrówki przez pustynię. Rozwiązanie polegało na zabraniu do pomocy dwóch tragarzy, a następnie, podczas podróży, zwalnianiu ich kolejno z zadania. Dalszą podróż umożliwiało dzielenie się pozostałą żywnością i wodą. Jak zaplanować kolejną podróż przez pustynię, gdy ma ona trwać:

a) 8 dni, jednak każdy może zabrać zapasy wody i żywności, który starcza dla jednej osoby tylko na 5 dni;

b) 18 dni, jednak każdy może zabrać zapas wody i żywności, który starcza dla jednej osoby tylko na 10 dni; by, na pustyni, by na pustyni wszystkim wystarczyło wody i żywności.

Rozwiązanie

a) Tym razem podróżnik zatrudni trzech tragarzy. Każdy będzie dysponował żywnością na 5 dni. Po pierwszym dniu podróży każdemu zostanie jeszcze żywność na 4 dni, wówczas zostanie zwolniony pierwszy tragarz. Zostawi on sobie zapas żywności potrzebny na jeden dzień powrotu, a zbędne 3 racje żywności podzieli między pozostałych dwóch tragarzy i podróżnika. Tak więc każdy z tragarzy i podróżnik, dysponują znowu żywnością wystarczającą im na 5 dni podróży. Po drugim dniu podróży, każdy z podróżników dysponuje żywnością, wystarczającą na jeszcze 4 dni podróży. Zostaje zwolniony następny tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 4 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 2 dni. Zapasy żywności na pozostałe dwa dni rozdzieli więc między podróżnika i pozostałego tragarza. W ten sposób podróżnik wraz z tragarzem, znowu będą dysponowali żywnością na 5 dni. Po trzecim dniu podróży, podróżnik i jego tragarz dysponują żywnością, wystarczającą na jeszcze 4 dni podróży. Zostaje zwolniony ostatni tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 4 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 3 dni. Zapas żywności na jeden dzień odda więc podróżnikowi. W ten sposób podróżnik znowu będzie dysponował żywnością na 5 dni. Ponieważ przebył już na pustyni 3 dni i ma jeszcze żywności na dalsze 5 dni, czyli przeżyje na pustyni 8 dni.

b) Tym razem podróżnik zatrudni ośmiu tragarzy. Każdy będzie dysponował żywnością na 10 dni. Po pierwszym dniu podróży każdemu zostanie jeszcze żywność na 9 dni, wówczas zostanie zwolniony pierwszy tragarz. Zostawi on sobie zapas żywności potrzebny na jeden dzień powrotu, a zbędne 8 racji żywności podzieli między pozostałych siedmiu tragarzy i podróżnika. Tak więc każdy z tragarzy i podróżnik, dysponują znowu żywnością wystarczającą im na 10 dni podróży. Po drugim dniu podróży, każdy z podróżników dysponuje żywnością, wystarczającą na jeszcze 9 dni podróży. Zostaje zwolniony następny tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 9 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 2 dni. Zapasy żywności na pozostałe siedem dni rozdzieli więc między podróżnika i pozostałych sześciu tragarzy. W ten sposób podróżnik wraz z tragarzami, znowu będą dysponowali żywnością na 10 dni. Po trzecim dniu podróży, podróżnik i jego tragarze dysponują żywnością, wystarczającą na jeszcze 9 dni podróży. Zostaje zwolniony następny tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 9 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 3 dni. Zapas żywności na sześć dni odda więc podróżnikowi i pozostałym pięciu tragarzom. Po czwartym dniu podróży każdemu zostanie jeszcze żywność na 9 dni, wówczas zostanie zwolniony następny tragarz. Zostawi on sobie zapas żywności potrzebny na cztery dni powrotu, a zbędne 5 racji żywności podzieli między pozostałych czterech tragarzy i podróżnika. Tak więc każdy z tragarzy i podróżnik, dysponują znowu żywnością wystarczającą im na 10 dni podróży. Po piątym dniu podróży, każdy z podróżników dysponuje żywnością, wystarczającą na jeszcze 9 dni podróży. Zostaje zwolniony następny tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 9 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 5 dni. Zapasy żywności na pozostałe cztery dni rozdzieli więc między podróżnika i pozostałych trzech tragarzy. W ten sposób podróżnik wraz z tragarzami, znowu będą dysponowali żywnością na 10 dni. Po szóstym dniu podróży, podróżnik i jego tragarze dysponują żywnością, wystarczającą na jeszcze 9 dni podróży. Zostaje zwolniony następny tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 9 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 6 dni. Zapas żywności na trzy dni odda więc podróżnikowi i pozostałym dwóm tragarzom. Po siódmym dniu podróży każdemu zostanie jeszcze żywność na 9 dni, wówczas zostanie zwolniony następny tragarz. Zostawi on sobie zapas żywności potrzebny na siedem dni powrotu, a zbędne 2 racje żywności podzieli między ostatniego tragarza i podróżnika. Tak więc tragarz i podróżnik, dysponują znowu żywnością wystarczającą im na 10 dni podróży. Po ósmym dniu podróży, każdy z podróżników dysponuje żywnością, wystarczającą na jeszcze 9 dni podróży. Zostaje zwolniony ostatni tragarz. Ma on w swoim chlebaku i bukłaku zapasy żywności wystarczające na jeszcze 9 dni podróży, jednak na powrót przez pustynię potrzeba mu tylko żywności na 8 dni. Zapas żywności na jeden dzień odda więc podróżnikowi. W ten sposób podróżnik znowu będzie dysponował żywnością na 10 dni. Ponieważ przebył już na pustyni 8 dni i ma jeszcze żywności na dalsze 10 dni, czyli przeżyje na pustyni 18 dni.

Chińskie pomiary

Zadanie

Po przeczytaniu tekstu „Haidao suanjing" Janek wraz z kolegą postanowili wyliczyć szerokość przepływającej nieopodal rzeki. Chłopcy postanowili, że punktem orientacyjnym będzie dla nich wysokie drzewo rosnące na przeciwległym brzegu rzeki. Znaleźli też tyczkę, która była o 20 cm dłuższa od wzrostu Janka. Janek poprosił kolegę, by przytrzymał tyczkę na brzegu rzeki, a sam oddalił się od tyczki na taką odległość, by zobaczyć czubek tryczki i czubek drzewa w jednej linii. Okazało się, że ten warunek był spełniony, gdy Janek stanął 2 m od tyczki. Następnie kolega Janka przestawił tyczkę 50 m od brzegu rzeki i razem przeprowadzili kolejny pomiar. Tym razem aby spełnić warunek, że Janek widzi czubek tyczki i czubek drzewa w jednej linii, musiał on oddalić się o 2,5 m od tyczki. Oblicz jak szeroka była mierzona przez chłopców rzeka? Czy przy podanych danych można wyliczyć wysokość drzewa? Jeśli tak, to podaj jego wysokość.

Rozwiązanie:

Do obliczenia szerokości drzewa wykorzystamy wzór podany w artykule „Haidao suanjing".

$$s = a \cdot \frac{d}{b - a}$$

Gdzie

s – szerokość rzeki

a – odległość Janka od pierwszej tyczki

d – odległość między tyczkami

b – odległość Janka od drugiej tyczki

Tak więc

$$s = 2 \cdot \frac{50}{2{,}5 - 2} = \frac{100}{0{,}5} = \frac{200}{1} = 200$$

Nie znając wzrostu Janka możemy obliczyć wysokość drzewa, pomniejszony o wzrost Janka.

Jak poprzednio korzystamy z gotowego wzoru

$$H = h \cdot \frac{d}{b - a} + h$$

Gdzie

H – wysokość drzewa

h – różnica wysokości tyczki i Janka

Tak więc

$$H = 0{,}2 \cdot \frac{50}{2{,}5 - 2} + 0{,}2 = \frac{10}{0{,}5} + 0{,}2 = \frac{20}{1} + 0{,}2 = 20 + 0{,}2 = 20{,}2$$

Odpowiedź

Szerokość rzeki wynosi 200 m, a wysokość drzewa 20,2m + wysokość Janka.

Dowody trójkąta

Spróbujcie rozwiązać niełatwe zadania z trygonometrii. W jednym zadaniu występuje funkcja kotangens (ctg), która jest odwrotnością funkcji tangens. Możemy zatem zapisać: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Zadanie 1.

W trójkącie, którego boki maja długości: a; b; c i środkowe m_a; m_b; m_c. Wykaż, że:

1) $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} > \frac{3}{4}$,

2) $m_a^2 + m_b^2 > \frac{9}{8}c^2$. Wskazówka: skorzystaj z nierówności $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$ i $(m_a - m_b)^2 \geq 0$.

Ad 1) Udowodniono w artykule „Trójkątne zadania" po pierwszym zadaniu.

Ad 2) Z własności udowodnionych w tekście i z nierówności trójkąta wynika, że

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b\right)^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}m_a \cdot \frac{2}{3}m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

Ponieważ kwadrat jest nieujemny, więc prawdziwa jest następująca nierówność"

$$(m_a - m_b)^2 \geq 0$$

$$m_a^2 - 2m_a m_b + m_b^2 \geq 0$$

$$m_a^2 + m_b^2 \geq 2m_a m_b$$

Ponieważ w nierówności

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot 2m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

Więc, gdy jeden ze składników zastąpimy czymś większym nierówność będzie nadal prawdziwa

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot (m_a^2 + m_b^2) + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot m_b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9} \cdot m_b^2 > c^2$$

$$\frac{8}{9}(m_a^2 + m_b^2) > c^2$$

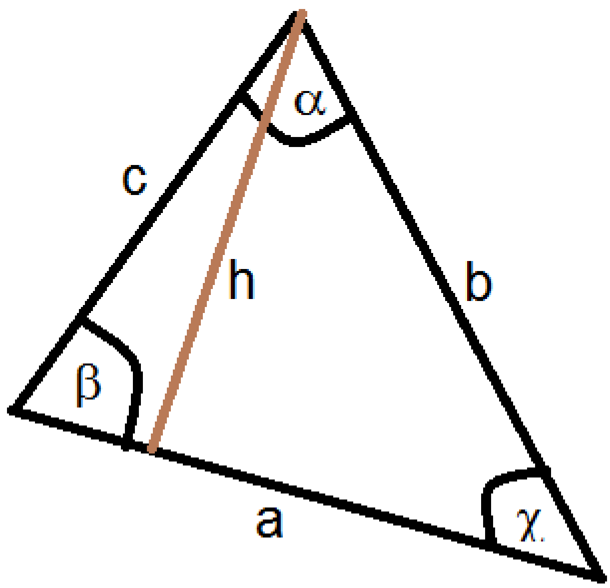
$$m_a^2 + m_b^2 > \frac{9}{8}c^2$$

Zadanie 2.

Wykaż że jeśli α; β; ɣ są kątami trójkąta o bokach a; b; c i polu S, to:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Rozwiązanie



Przy założeniu , że a jest podstawą

$$S = \frac{1}{2}ah$$

Gdzie h można wyliczyć albo ze wzoru

$$h = c\sin\beta$$

albo

$h = b \sin \gamma$

W pierwszym przypadku

$S = \frac{1}{2} ac \sin \beta$

W drugim przypadku

$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Gdyby przyjąć za podstawę trójkąta bok c, wówczas

$S = \frac{1}{2} cb \sin \alpha$

Z tych wzorów można wyznaczyć

$\sin \alpha = \frac{2S}{cb}$

$\sin \beta = \frac{2S}{ac}$

$\sin \gamma = \frac{2S}{ab}$

Z twierdzenia kosinusów mamy następujące wzory

$c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$

$a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2$

$a^2 + b^2 - 2abc \cos \gamma = c^2$

Z tych wzorów można wyznaczyć: $\cos \alpha;\ \cos \beta;\ \cos \gamma$

$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Ponieważ

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{cb}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

Podobnie

$$\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{2S}{ac}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$$

$$\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{2S}{ab}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Po dodaniu stronami tych wzorów mamy

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} =$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{4S} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Zadanie 3

Wykaż, że jeśli a; b; c są długościami boków trójkąta, zaś α; β; γ są kątami tego trójkąta leżącymi odpowiednio naprzeciw tych boków i $a < \frac{b+c}{2}$, to $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

Rozwiązanie

Sprawdźmy co wynika z założenia

$$a < \frac{b+c}{2}$$

$$2a < b + c$$

Pomnóżmy obie strony nierówności przez (-1)

$$-2a > -(b+c)$$

Niech Ob – obwód trójkąta. Wówczas

$$Ob = a + b + c$$

$$a = Ob - (b+c)$$

Do obu stron nierówności dodajmy Ob.

$$Ob - 2a > Ob - (b + c)$$

$$Ob - 2a > a$$

$$Ob > 3a$$

$$a < \frac{1}{3} Ob$$

Sprawdźmy jeszcze jaki warunek musi spełniać kąt α aby była spełniona nierówność z tezy

$$\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$2\alpha < \beta + \gamma$$

Obie strony nierówności mnożymy przez (-1)

$$-2\alpha > -(\beta + \gamma)$$

Ale

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

Więc

$$\alpha = 180^o - (\beta + \gamma)$$

Wróćmy do naszej nierówności i do obu stron dodajmy 180^o

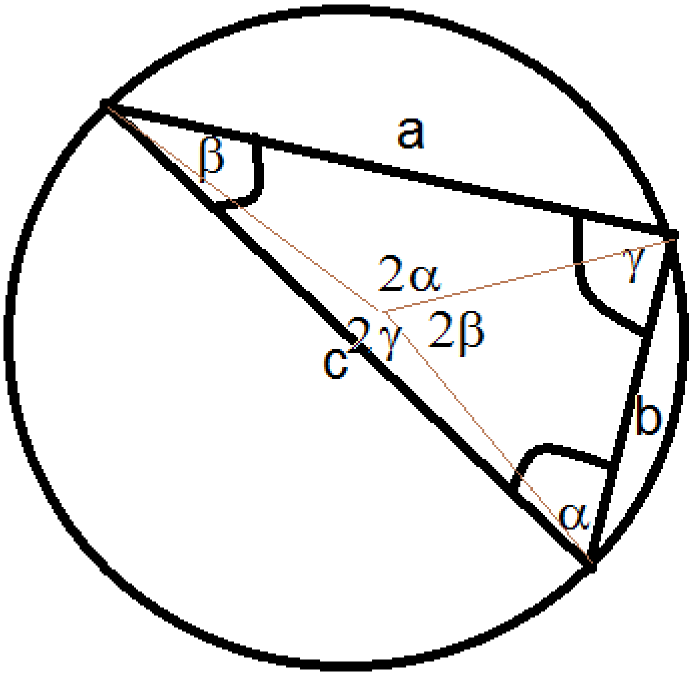
$$180^o - 2\alpha > 180^o - (\beta + \gamma)$$

$$180^o - 2\alpha > \alpha$$

$$180^o > 3\alpha$$

$$\alpha < 60^o$$

Popatrzmy teraz na rysunek



Ponieważ na każdym trójkącie można opisać okrąg więc boki tego trójkąta są cięciwami odpowiednich łuków, a jego kąty są kątami wpisanymi w ten okrąg. Kąt α leżący naprzeciw boku a jest kątem wpisanym opartym na łuku, którego cięciwą jest bok a. Ponieważ bok ten jest mniejszy od $\frac{1}{3}$ obwodu trójkąta, więc interesujący nas łuk jest mniejszy od $\frac{1}{3}$ całego okręgu i dlatego kąt α jest mniejszy od 60^o, czyli spełnia nierówność

$$\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Suma sześcianów kwadratem

Zadanie

Znajdź przykład równości sumy sześcianów kolejnych liczb naturalnych z kwadratem liczby naturalnej. Czy wiesz jak to zrobić? Korzystając z zadania „Suma kolejnych sześcianów kwadratem" znajdź rozwiązania równania $5n^2 - 1 = (2b)^2$ i zapisz wynikające z tąd równości $(a+1)^3 + (a+2)^3 + \cdots + (a+n)^3 = (nb)^2$. Uwaga 1. Równanie $x^3 + (x+1)^3 = y^2$ ma w liczbach naturalnych $x, y \geq 1$ tylko rozwiązanie $(x,y) = (1;3)$. Uwaga 2. Równanie $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = y^2$ ma w liczbach naturalnych $x, y \geq 1$ dwa rozwiązania $(x,y) = (1;6)$, $(x,y) = (23;204)$

Rozwiązanie

Równanie $5n^2 - 1 = (2b)^2$ spełnia para $(n; b) = (305; 341)$ Oznacza to, że $a = \frac{n-1}{2} = \frac{305-1}{2} = \frac{304}{2} = 152$. Suma będzie składała się z 305 wyrazów, oto on

$153^3 + 154^3 + 155^3 + 156^3 + 157^3 + 158^3 + 159^3 + 160^3 + 161^3 + 162^3 + 163^3 +$

$+164^3 + 165^3 + 166^3 + 167^3 + 168^3 + 169^3 + 170^3 + 171^3 + 172^3 + 173^3 + 174^3 +$

$+175^3 + 176^3 + 177^3 + 178^3 + 179^3 + 180^3 + 181^3 + 182^3 + 183^3 + 184^3 + 185^3 +$

$+186^3 + 187^3 + 188^3 + 189^3 + 190^3 + 191^3 + 192^3 + 193^3 + 194^3 + 195^3 + 196^3 +$

$+197^3 + 198^3 + 199^3 + 200^3 + 201^3 + 202^3 + 203^3 + 204^3 + 205^3 + 206^3 + 207^3 +$

$+208^3 + 209^3 + 210^3 + 211^3 + 212^3 + 213^3 + 214^3 + 215^3 + 216^3 + 217^3 + 218^3 +$

$+219^3 + 220^3 + 221^3 + 222^3 + 223^3 + 224^3 + 225^3 + 226^3 + 227^3 + 228^3 + 229^3 +$

$+230^3 + 231^3 + 232^3 + 233^3 + 234^3 + 235^3 + 236^3 + 237^3 + 238^3 + 239^3 + 240^3 +$

$+241^3 + 242^3 + 243^3 + 244^3 + 245^3 + 246^3 + 247^3 + 248^3 + 249^3 + 250^3 + 251^3 +$

$+252^3 + 253^3 + 254^3 + 255^3 + 256^3 + 257^3 + 258^3 + 259^3 + 260^3 + 261^3 + 262^3 +$

$+263^3 + 264^3 + 265^3 + 266^3 + 267^3 + 268^3 + 269^3 + 270^3 + 271^3 + 272^3 + 273^3 +$

$+274^3 + 275^3 + 276^3 + 277^3 + 278^3 + 279^3 + 280^3 + 281^3 + 282^3 + 283^3 + 284^3 +$

$+285^3 + 286^3 + 287^3 + 288^3 + 289^3 + 290^3 + 291^3 + 292^3 + 293^3 + 294^3 + 295^3 +$

$+296^3 + 297^3 + 298^3 + 299^3 + 300^3 + 301^3 + 302^3 + 303^3 + 304^3 + 305^3 + 306^3 +$

$+307^3 + 308^3 + 309^3 + 310^3 + 311^3 + 312^3 + 313^3 + 314^3 + 315^3 + 316^3 + 317^3 +$

$+318^3 + 319^3 + 320^3 + 321^3 + 322^3 + 323^3 + 324^3 + 325^3 + 326^3 + 327^3 + 328^3 +$

$+329^3 + 330^3 + 331^3 + 332^3 + 333^3 + 334^3 + 335^3 + 336^3 + 337^3 + 338^3 + 339^3 +$

$+340^3 + 341^3 + 342^3 + 343^3 + 344^3 + 345^3 + 346^3 + 347^3 + 348^3 + 349^3 + 350^3 +$

$+351^3 + 352^3 + 353^3 + 354^3 + 355^3 + 356^3 + 357^3 + 358^3 + 359^3 + 360^3 + 361^3 +$

$+362^3 + 363^3 + 364^3 + 365^3 + 366^3 + 367^3 + 368^3 + 369^3 + 370^3 + 371^3 + 372^3 +$

$+373^3 + 374^3 + 375^3 + 376^3 + 377^3 + 378^3 + 379^3 + 380^3 + 381^3 + 382^3 + 383^3 +$

$+384^3 + 385^3 + 386^3 + 387^3 + 388^3 + 389^3 + 390^3 + 391^3 + 392^3 + 393^3 + 394^3 +$

$+395^3 + 396^3 + 397^3 + 398^3 + 399^3 + 400^3 + 401^3 + 402^3 + 403^3 + 404^3 + 405^3 +$

$+406^3 + 407^3 + 408^3 + 409^3 + 410^3 + 411^3 + 412^3 + 413^3 + 414^3 + 415^3 + 416^3 +$

$+417^3 + 418^3 + 419^3 + 420^3 + 421^3 + 422^3 + 423^3 + 424^3 + 425^3 + 426^3 + 427^3 +$

$+428^3 + 429^3 + 430^3 + 431^3 + 432^3 + 433^3 + 434^3 + 435^3 + 436^3 + 437^3 + 438^3 +$

$+439^3 + 440^3 + 441^3 + 442^3 + 443^3 + 444^3 + 445^3 + 446^3 + 447^3 + 448^3 + 449^3 +$

$+450^3 + 451^3 + 452^3 + 453^3 + 454^3 + 455^3 + 456^3 + 457^3 = 10817040025 = 104005^2$

$= (305 \cdot 341)^2$

Jak grać

Zadanie 1.

W artykule „Gry sprawiedliwe i gry niesprawiedliwe" opisaliśmy strategię wygrywającą dla gry NIM w wersji standardowej, to znaczy takiej, że na początku gry kamienie rozłożone są w trzech kupkach. Znajdź strategię wygrywającą dla tej gry, gdy na początku kamienie rozkładane są na cztery kupki.

Rozwiązanie

Strategia wygrywająca jest identyczna, jak ta opisana w artykule „Gry sprawiedliwe i gry niesprawiedliwe". Liczymy kamienie w każdej kupce, kodujemy je binarnie i wpisujemy do tabelki o czterech wierszach. Następnie staramy się zabrać z jednej kupki taką ilość kamieni, by ilość jedynek w każdej kolumnie tabelki była parzysta.

Zadanie 2.

Magda i Piotrek grają w grę. Zasady gry są następujące: 1. Z losowania wybierana jest osoba rozpoczynająca grę. Następnie podaje ona liczbę naturalną nie większą od 10. 2. Następnie gracze, na przemian, podają następne liczby tak, by były one większe od poprzedniej, lecz nie więcej niż o 10. Wygrywa ten, kto powie 100. Opracuj strategię wygrywającą dla tej gry.

Rozwiązanie

Naszym zadaniem jest opracować taką strategię, by ostatni ruch, ruch w którym powiemy 100 należał do nas. Spróbujmy rozważyć grę od końca. Gdy w przedostatnim ruchu powiemy jakąś liczbę nie mniejszą niż 90, wówczas nasz przeciwnik powie 100 i wygra. Gdy powiemy liczbę 89, wówczas największą liczbą jaką może powiedzieć nasz przeciwnik jest liczba 99, a najmniejszą liczbą jaką może podać jest liczba 90. Jednak, po każdej jego odzywce, będziemy mogli w następnym ruchu powiedzieć 100 i wygrać. Gdy powiemy liczbę mniejszą od 89, wówczas nasz przeciwnik wymieni liczbę 89 i przejmie strategię wygrywającą. Wniosek jest taki, że wygrywa ta osoba, która w kolejce poprzedniej powie 89. Podobne rozumowanie do tego powyższego wykaże, że przed liczbą 89 trzeba powiedzieć liczbę 78, i t d. Tak więc osoba rozpoczynająca grę jeśli chce wygrać, to niezależnie od liczb wypowiedzianych przez przeciwnika musi wypowiadać kolejno następujące liczby: 1; 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89; 100.

Zadanie konkursowe „Podróż daleka”

Po kilku podróżach przez pustynię Gobi wybieramy się w drogę, która może zająć wiele dni. W ile osób możemy tego dokonać, gdy do pomocy możemy mieć tylko tragarzy, którzy, podobnie jak my, poruszają się wyłącznie na własnych nogach. Jak można przeprowadzić taką podróż, gdy trasa potrwa wiele dni? Udowodnij, że jeśli podróżnik w czasie podróży przez pustynię ma możliwość zabrać ze sobą żywność wystarczającą na n dni i może zatrudnić dowolną liczbę tragarzy, z których każdy może zabrać ze sobą żywność i wodę wystarczającą również na n dni, to maksymalny czas podróży przez pustynię może wynosić 2n – 2 dni, przy założeniu, że każdy z tragarzy zwolnionych w trakcie podróży, dostanie wodę i żywność wystarczającą na powrót przez pustynię.

Rozwiązanie

Na początek udowodnijmy, że możliwa jest podróż podróżnika przez pustynię trwająca2n – 2 dni, gdy zabierze on odpowiednią ilość tragarzy i każdy z tragarzy, a także sam podróżnik na podróż zabierze ze sobą żywność potrzebną na przeżycie n dni.

Załóżmy, że podróżnik zatrudni n – 2 tragarzy, czyli podróż rozpocznie n – 1 osób. Pod koniec każdego dnia, albo o świcie po przebudzeniu podróżnik będzie zwalniał jednego tragarza zabierając mu zbędną żywność.

Po pierwszym dniu, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze n – 1 dni, albo inaczej – po pierwszym dniu w chlebaku każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót jedną rację żywności, czyli n – 2 racje może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie n – 2 ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na 10 dni podróży.

Po drugim dniu, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze n – 1 dni, albo inaczej – po drugim dniu w chlebaku każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót dwie racje żywności, czyli n – 3 racji może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie n – 3 ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na 10 dni podróży.

…

Po k-tym dniu, gdzie k <n – 2, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze n – 1 dni, albo inaczej – po drugim dniu w chlebaku każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót k racji żywności, czyli n – k - 1 racji może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie n – k – 1 ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na 10 dni podróży.

…

W ten sposób w n – 3 dniu podróży, będzie już tylko 3 podróżujących (podróżnik i 2 tragarzy). Oczywiście rozpoczną ten dzień podróży z pełnymi chlebakami (z n racjami żywności na osobę). Zwolniony po tym dniu tragarz będzie potrzebował na podróż powrotną n – 2 racje żywności, czyli dwie racje żywności rozda pomiędzy podróżnika i ostatniego tragarza. Dwaj kontynuujący podróż, będą znowu mieli żywność na 10 dni dla każdego.

Po n – 2 dniu podróży zostanie zwolniony ostatni tragarz. Na powrót, będzie on potrzebował n – 2 racje żywności, czyli jedną rację żywności odda podróżnikowi. W ten sposób podróżnik po przebyciu n – 2 dni podróży ma nadal żywność na n dni podróży. N – 2 dni już przebyte i n dni do przebycia daje 2n -2 dni podróży.

Załóżmy teraz, że tragarzy było zatrudnionych tylu, że po n – 2 dniach podróży zostali jeszcze jacyś tragarze i każdy z nich miał n racji żywności. W takim razie po kolejnym n – 1 dniu, każdemu z podróżnych zostaje jeszcze żywności na n – 1 dni. Zwolnienie pozostałych tragarzy po tym dniu nic nie da, gdyż zwolnieni tragarze mają na powrót aż n – 1 dni i tyle potrzebują żywności, czyli nic nie oddadzą podróżnikowi. Tak więc po przebyciu n – 1 dni podróży i zwolnieniu wtedy pozostałych tragarzy, na dalszą podróż podróżnik będzie miał tylko n – 1 racji żywności, czyli starczy mu na łączną podróż długości 2n – 2 dni podróży.